d'enregistrement
C.N.R.S. : A O. 11 501

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUE

présentée

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

(PARIS VI)

par

Bernard LEAUTE

pour obtenir

le grade de Docteur es-Sciences

Sujet de la Thèse : " Trois études en Relativité Générale "

Soutenue le 26 juin 1975 devant la Commission d'Examen

Mr. A. LICHNEROWICZ	Président
Mr. A. PAPAPETROU	Examinateur
Mr. L. BEL	"
Mme M.A. TONNELAT	"
Mr. E. ARNOUS	

d'enregistrement
C.N.R.S. : A O. 11 501

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUE

présentée

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

(PARIS VI)

par

Bernard LEAUTE

pour obtenir

le grade de Docteur es-Sciences

Sujet de la Thèse : " Trois études en Relativité Générale "

Soutenue le 26 juin 1975 devant la Commission d'Examen

Mr. A. LICHNEROWICZ	Président
Mr. A. PAPAPETROU	Examinateur
Mr. L. BEL	"
Mme M.A. TONNELAT	"
Mr. E. ARNOUS	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur L. BEL, Maître de Recherche, qui, après m'avoir initié à la recherche, n'a cessé de me guider par ses conseils éclairés et de me prodiguer ses encouragements tout au long de ces années de travail.

J'exprime ma respectueuse gratitude à Monsieur A. PAPAPETROU, Directeur de Recherche, dont l'aide précieuse et la bienveillante attention m'ont permis de mener à bien ces recherches.

Je remercie Madame M.A. TONNELAT, Professeur à l'Université Paris VI, qui a bien voulu m'accueillir au Laboratoire de Physique Théorique.

Je remercie Messieurs A. LICHNEROWICZ, Professeur au Collège de France, et E. ARNOUS, Professeur à l'Université Paris VI, qui ont bien voulu s'intéresser à ces études et me faire l'honneur d'accepter d'être membres du Jury.

Enfin je veux citer Madame M.J. LEQUERRE et Mademoiselle C. TRECUL et les remercier pour avoir dactylographié et mis en page avec soin et célérité le texte de cette thèse.

Le présent travail est constitué de trois études indépendantes :

Chapitre I : "Champ vectoriel et configurations massives en équilibre"

Chapitre II : "Singularités, sources de quelques solutions statiques ou stationnaires"

Chapitre III : "Etude du schéma matière pure isotrope"

C H A P I T R E I

- CHAMP VECTORIEL ET CONFIGURATIONS MASSIVES EN EQUILIBRE -

S O M M A I R E

pages

Introduction ..... I - 1

I. - THEORIE NEWTONIENNE 4

11. - Exposé 4

12. - Conclusions 7

II. - THEORIE RELATIVISTE - EQUATIONS DU CHAMP 8

21. - Cas général 8

22. - Cas statique à symétrie sphérique 10

III. - RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS DU CHAMP 15

31. - Ecriture approchée des équations du champ 15

32. - Solutions approchées des équations du champ 17

IV. - MASSE TOTALE 21

41. - Etude de la masse grave en seconde approximation - Existence d'une valeur maximum 21

42. - Energie du contenu matériel 24

43. - Exemple 26

44. - Validité des solutions approchées utilisées 28

V. - PRESSION - EQUATION DE COMPRESSIBILITE EFFECTIVE 30

51. - Position et solution du problème 30

52. - Commentaires 31

Appendices 32

Références 37

Addenda 38

INTRODUCTION

Depuis les travaux de L. Landau [1], S. Chandraseckhar [2], J.R. Oppenheimer et G.M. Volkoff [3], J.A. Wheeler et ses collaborateurs [4].. il semble couramment admis aujourd'hui qu'une configuration statique à symétrie sphérique de matière froide, c'est-à-dire ayant épuisé ses ressources énergétiques conventionnelles, ne puisse exister que si sa masse est de l'ordre d'une masse solaire. Cette opinion se fonde, le plus souvent, sur l'étude, dans le cadre de la relativité générale, de configurations décrites par un schéma fluide parfait complété par une équation de compressibilité compatible avec la causalité c'est-à-dire conduisant à une vitesse du son inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Il semble aussi couramment admis que, même dans le cas où l'on considère que les particules constitutives de la configuration, agissent les unes sur les autres par des forces à courte portée, ces interactions peuvent être valablement résumées par une équation de compressibilité déduite du tenseur énergie-impulsion relatif au champ correspondant, en définissant en particulier la pression par la moyenne des trois tensions principales [5].

.../...

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier des configurations matérielles, froides, statiques à symétrie sphérique en équilibre sous l'action, d'une part, du champ de gravitation et, d'autre part, d'un champ vectoriel répulsif à courte portée. La notion de matière froide sera traduite en supposant la pression cinématique nulle.

Nous verrons que, d'après ce modèle, dont nous résolvons les équations aux deux premiers ordres, par rapport à un paramètre ζ, sans dimension, proportionnel à la densité centrale $\rho^{(o)}$, des configurations, ayant des masses largement supérieures à la masse solaire, sont parfaitement possibles sans qu'il y ait violation de la causalité. De plus, l'existence d'une masse limite, correspondant à une valeur $\rho^{(o)}_{Max}$ de la densité centrale pour laquelle la validité de la deuxième approximation reste satisfaisante compte tenu des valeurs de l'intensité et de la portée du champ choisies comme exemple, sera mise en évidence au cours de l'analyse. Il convient de noter que, comme ce dernier résultat apparaît au terme d'un calcul mené dans le cadre d'une procédure d'approximation, on ne peut le considérer comme absolument acquis.

Nous constaterons enfin qu'il n'est pas possible de substituer à notre modèle, en toute rigueur et toutes choses égales d'ailleurs, un modèle de type fluide parfait complété par une équation de compressibilité, dans le sens habituel de ce terme. Au premier ordre significatif du moins, la substitution envisagée peut toutefois être valablement effectuée ; il importe de préciser cependant que l'équation de compressibilité impliquée dans ce processus revêt une forme particulière car dans sa formulation figure un terme constant lié aux données caractéristiques de la configuration

.../...

entière. Malgré son caractère élémentaire, ce résultat nous incite à penser que les équations de compressibilité purement locales employées habituellement sont sans doute insuffisantes pour la description des configurations matérielles.

Notre but, dans cette étude, n'est pas de présenter au lecteur un modèle physiquement réaliste, mais de lui soumettre des réponses à des questions de principe dont l'intérêt théorique est, croyons-nous, assez évident.

I. THEORIE NEWTONIENNE.

1 1. - Exposé

Dans cette section liminaire nous exposons la théorie newtonienne du modèle décrit dans l'introduction. Les résultats, déduits de cette approche élémentaire, seront utilisés dans le développement de la théorie relativiste pour la détermination des termes principaux des solutions approximatives des équations du champ.

Selon la description notée dans l'introduction, nous considérons une configuration matérielle à symétrie sphérique dont chaque élément est en équilibre sous l'action :

. d'une part, d'une force attractive dérivant du potentiel newtonien V régi par l'équation :

$$\Delta V = 4\pi G \rho \qquad \left(\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \right) \tag{1.1}$$

dans laquelle $\rho(r)$ est la densité de matière et G la constante newtonienne de gravitation ;

. d'autre part, d'une force répulsive à courte portée dérivant du potentiel Φ régi par l'équation :

$$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi = -4\pi g \sigma' \tag{1.2}$$

dans laquelle $\sigma'(r)$ est la densité de " charge " portée par la matière et g une constante[1] dont la valeur dépend du système d'unités de " charge ". Il est naturel de poser :

$$\sigma' = k\rho . \tag{1.3}$$

Compte tenu de cette relation, la condition d'équilibre de la configuration s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V + k \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = 0 \quad ,$$

---

(1) Cette constante g intervient ici d'une façon similaire à ϵ_0 en électrostatique.

soit :

$$(1.4) \qquad \frac{dV}{dr} + h \frac{d\Phi}{dr} = 0 \ .$$

De cette condition, de (1.3), des équations (1.1) (1.2) on déduit la relation suivante, entre ρ et Φ :

$$(1.5) \qquad 4\pi\rho = - \frac{\mu^2 h}{G - k^2 g} \Phi \ .$$

Reportant cette expression en (1.2), compte tenu de (1.3) on obtient :

$$(1.6) \qquad \Delta\Phi - \frac{\mu^2 G}{G - k^2 g} \Phi = 0 \ .$$

A l'extérieur de la matière, les potentiels V et Φ satisfont aux équations :

$$(1.7) \qquad \Delta V = 0 \ ,$$

$$(1.8) \qquad \Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0 \ .$$

Nous allons maintenant résoudre les équations de notre modèle. Cela consiste, précisément, à déterminer des solutions Φ , V des équations intérieures et extérieures, bornées en tout point de l'espace, tendant vers zéro pour r tendant vers l'infini et enfin continues ainsi que leurs dérivées premières Φ' , V' à la surface de la configuration.

Considérons d'abord la fonction $\Phi(r)$. La résolution de (1.6) conduit , compte tenu des conditions que nous venons d'énoncer, à la solution :

$$(1.9) \qquad \Phi = \dot{A} \frac{\sin \lambda r}{r}$$

où l'on a posé :

$$(1.10) \qquad \lambda^2 = - \frac{\mu^2 G}{G - k^2 g} \quad (> 0) \ .$$

A l'origine, en $r = 0$, nous avons d'après (1.5) :

$$(1.11) \qquad \Phi(0) = \frac{4\pi G}{\lambda^2 k} \rho(0)$$

d'où il résulte l'expression de la constante $\dot{A}$, introduite en (1.9) :

$$(1.12) \qquad \dot{A} = \frac{4\pi G}{\lambda^2 k} \rho(0) \ .$$

La densité centrale $\rho(0)$ est la donnée fondamentale en fonction de laquelle nous allons calculer les caractéristiques du modèle.

La solution de (1.8), s'annulant à l'infini, s'écrit :

$$\Phi = \mathring{A}\,\frac{e^{-\mu r}}{r} \qquad (1.13)$$

Cette expression doit être " raccordée " avec $\mathring{\Phi}$, donnée en (1.9) à la surface de la configuration; soit :

$$\mathring{\Phi}(R) = \dot{\Phi}(R) \qquad (1.14)$$

et de même les dérivées :

$$\mathring{\Phi}'(R) = \dot{\Phi}'(R)\,. \qquad (1.15)$$

En explicitant ces relations on trouve :

$$tg\,\lambda R = -\frac{\lambda}{\mu}\,, \qquad (1.16)$$

$$\mathring{A} = \dot{A}\,\sin\lambda R\; e^{\mu R}\,. \qquad (1.17)$$

En utilisant la relation (1.5), on déduit de (1.9) et (1.12) l'expression de $\rho(r)$:

$$\rho(r) = \rho(0)\,\frac{\sin\lambda r}{\lambda r}\,. \qquad (1.18)$$

Il y a lieu d'observer que, pour aboutir, grâce à (1.16), à une valeur réelle du rayon de raccordement R , on doit supposer que λ^2 , défini en (1.10), est positif; pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire que G , g et k satisfassent à l'inégalité suivante :

$$\frac{G}{k^2 g} < 1 \qquad (1.19)$$

En considérant les expressions (1.16) et (1.18) on voit immédiatement que :

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \lambda R < \pi\,; \qquad (1.20)$$

il y a ainsi deux limites pour les valeurs possibles du rayon R de raccordement.

Déterminons maintenant la fonction $V(a)$. Il résulte de la condition d'équilibre (1.4), l'expression :

(1.21) $$\dot{V} = -k\dot{\Phi} + \nu \ .$$

La solution de (1.7), nulle à l'infini, s'écrit :

(1.22) $$\dot{V} = -\frac{GM}{r}$$

De l'explicitation des conditions de raccordement :

$$\dot{V}(R) = \overset{\circ}{V}(R) \quad , \quad \dot{V}'(R) = \overset{\circ}{V}'(R)$$

découlent les expressions suivantes des constantes ν et M :

(1.23) $$\nu = \frac{4\pi G}{\lambda^2}\rho(0)\cos\lambda R \ ,$$

(1.24) $$M = \frac{4\pi}{\lambda^3}\rho(0)\left(\sin\lambda R - \lambda R\cos\lambda R\right).$$

1 2. Conclusions.

De cette étude newtonienne de notre modèle résultent les conclusions suivantes, à savoir :

. la masse des configurations

$$M = \frac{4\pi}{\lambda^3}\rho(0)\left(\sin\lambda R - \lambda R\cos\lambda R\right)$$

est une fonction linéaire de la densité centrale $\rho(0)$, elle croît avec elle et peut donc atteindre toute valeur si élevée soit-elle,

. le rayon de raccordement R se déduit de

$$tg\lambda R = -\frac{\lambda}{\mu}$$

il est déterminé uniquement par les constantes μ, G, g et k caractéristiques des champs à la base du modèle,

. la matière constitutive des configurations est répartie avec la densité $\rho(a)$

$$\rho(a) = \rho(0)\frac{\sin\lambda a}{\lambda a} \ .$$

II. THEORIE RELATIVISTE - EQUATIONS DU CHAMP.

2.1.- Cas général.

Dans cette section et les suivantes nous allons exposer l'étude relativiste de notre modèle. Les équations de champ, posées en prémices à nos raisonnements et calculs, sont la transposition, dans le cadre relativiste, des équations newtoniennes (1.1) (1.2).

Ces équations sont, d'une part, les équations d'Einstein[1] :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \qquad \left(\alpha,\beta \cdots = 0,1,2,3 \; ; \; \chi = \frac{8\pi G}{c^2}\right) \tag{2.1}$$

et d'autre part, les équations régissant le champ vectoriel :

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} + \mu^2 \Phi^\alpha = \kappa J^\alpha \, , \tag{2.2}$$

$$\nabla_\alpha \Phi^\alpha = 0 \, , \tag{2.3}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Phi_\beta - \partial_\beta \Phi_\alpha \, . \tag{2.4}$$

Dans l'équation (2.2) : μ est l'inverse de la portée, κ est une constante dont la valeur dépend du choix du système d'unités et J^α la densité du courant, source du champ.

Le tenseur énergie-impulsion de la matière froide et du champ vectoriel s'écrit comme suit :

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \tau T^{(ch.)}_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

où ρ est la densité de matière, u_α le vecteur vitesse unitaire du fluide, τ une constante dépendant du choix des unités et $T^{(ch.)}_{\alpha\beta}$ le tenseur énergie-impulsion du champ vectoriel :

$$T^{(ch.)}_{\alpha\beta} = - F_{\lambda\alpha} F^{\lambda}{}_{\beta} - \mu^2 \Phi_\alpha \Phi_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} + \mu^2 \Phi_\lambda \Phi^\lambda \right). \tag{2.6}$$

---

(1) Dans ce chapitre nous utilisons la signature + 2.

Aux équations précédentes nous adjoignons la relation suivante :

(2.7) $$J^\alpha = \sigma u^\alpha$$

dans laquelle σ désigne la densité de " charge vectorielle ".

De la conservation du vecteur courant J^α , impliquée par (2.2) (2.3), il résulte :

(2.8) $$\nabla_\alpha (\sigma u^\alpha) = 0 .$$

Des relations de conservation satisfaites par $T_{\alpha\beta}$, on déduit, compte tenu de (2.1) (2.2) (2.3) (2.4) (2.7) :

(2.9) $$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0$$

qui est l'équation de continuité du milieu considéré, et :

(2.10) $$\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \tau K \sigma u^\gamma F_{\gamma\beta}$$

qui est le système différentiel aux lignes de courant.

En rapprochant (2.8) et (2.9) on obtient la relation suivante :

(2.11) $$u^\alpha \partial_\alpha \left(\frac{\sigma}{\rho}\right) = 0$$

selon laquelle le rapport $k = \frac{\sigma}{\rho}$ demeure constant le long de chaque ligne de courant; si, de plus, on admet qu'il le reste aussi en passant d'une ligne à l'autre alors le schéma matériel envisagé est dit homogène.

Nous avons écrit en (2.1) (2.2) les équations régissant le cas intérieur; pour formuler celles relatives au cas extérieur il nous suffit d'annuler ρ et σ obtenant ainsi :

(2.12) $$S_{\alpha\beta} = \chi \tau T^{(el.)}_{\alpha\beta} ,$$

(2.13) $$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} + \mu_0 \Phi^\alpha = 0 .$$

2 2. - Cas statique à symétrie sphérique.

2 2 1 Cas statique

Supposons que l'espace-temps V_4 soit statique, il admet alors un groupe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps; soit $\vec{\xi}$ le vecteur générateur de ce groupe, on sait qu'il existe des systèmes de coordonnées locales de V_4 adaptées à $\vec{\xi}$ tels que les composantes de ce vecteur, rapportées à l'un d'eux, s'écrivent :

$$\xi^0 = 1 \quad , \quad \xi^i = 0 \quad ; \quad \xi_0 = g_{00} \quad , \quad \xi_i = 0$$

(2.14) et

$$\vec{\xi}^2 = - \xi^2 = g_{00} \qquad (x^0 = ct \; ; \; i,j = 1,2,3) \; ;$$

ceci équivaut à écrire que, dans ce système de coordonnées :

$$\partial_0 g_{\mu\rho} = \qquad , \qquad g_{0i} = 0 .$$

En raison du caractère statique de V_4 on a aussi :

$$\Phi_\alpha : \left(\Phi_0 \quad , \quad \Phi_i \equiv 0 \right)$$

(2.15) et

$$\partial_0 \Phi = 0 \; ;$$

$$u_\alpha : \left(u_0 \; , \quad u_i \equiv 0 \right)$$

(2.16) et

$$\partial_0 u_0 = 0 \quad .$$

De (2.14) et (2.16) on déduit :

(2.17) $$\vec{\xi} = \xi \, \vec{u} \quad .$$

Le système différentiel aux lignes de courant (2.10) s'écrit maintenant, compte tenu de (2.17), sous la forme :

(2.18) $$\rho \, \partial_\beta \, \mathrm{Log} \, \xi + \tau \, \chi_{\sigma\rho} \, u_\rho \, F_{\beta\rho} = 0 .$$

Cette relation, formulée dans un système de coordonnées général, traduit, ainsi que nous le verrons, le fait que la configuration est en équilibre.

2 2 2 Cas statique à symétrie sphérique.

La formulation générale des métriques statiques à symétrie sphérique est la suivante :

(2.19) $$ds^2 = -e^{2\alpha} dT^2 + e^{2\beta} dr^2 + r^2 e^{2\gamma} d\Sigma^2$$

où $$T = x^0 = ct \quad , \quad d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

et α, β, γ fonctions de la seule coordonnée r. Ajoutons que, d'après (2.14), on a :

(2.20) $$\alpha = \text{Log}\, \xi \, .$$

En raison de la symétrie sphérique la seule composante non identiquement nulle Φ_1, du champ vectoriel Φ_α (2.15), n'est fonction que de r et l'on pose :

$$\Phi = \Phi_1(r) \, .$$

La métrique (2.19) peut être décomposée comme suit :

(2.21) $$ds^2 = -(\omega^1)^2 + \sum_i (\omega^i)^2$$

avec

(2.22) $$\omega^1 = e^\alpha dT \, , \quad \omega^2 = e^\beta dr \, , \quad \omega^3 = r e^\gamma d\theta \, , \quad \omega^4 = r \sin\theta \, e^\gamma d\varphi \, .$$

On a, dans le repère orthonormé correspondant :

(2.23) $$u^1 = 1 \quad , \quad u^i = 0 \quad ; \quad u_1 = -1 \quad , \quad u_i = 0$$

et

(2.24) $$F_{12} = e^{-(\alpha+\beta)} \Phi' \quad , \quad \left(\Phi' = \frac{d\Phi}{dr} \right)$$

comme seule composante non identiquement nulle du champ $F_{\alpha\beta}$.

Compte tenu des définitions des quantités $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ notées à l'appendice A en (A.6) et des formules (A.5), les équations d'Einstein s'écrivent dans ce repère, sous la forme :

(2.25) $$S_{22} \equiv 2\underline{B} + \underline{D} = \lambda (\rho + q) \, ,$$

(2.26) $$S_{11} \equiv -(2\underline{C} + \underline{D}) = \lambda p \, ,$$

(2.27) $$S_{11} = S_{11} = -(A + B + C) = \chi q$$

où l'on a posé :

(2.28) $$p \equiv \frac{r}{2} e^{-2\alpha}\left(e^{-2\beta}\Phi'^2 - \mu^2\Phi^2\right).$$

(2.29) $$q \equiv -\frac{r}{2} e^{-2\alpha}\left(e^{-2\beta}\Phi'^2 + \mu^2\Phi^2\right).$$

Aux équations d'Einstein s'ajoute l'équation relative à l'unique composante non nulle du champ vectoriel; elle s'écrit comme suit :

(2.30) $$e^{-2\beta}\left[\Phi'' + \left(\frac{2}{r} - \alpha' - \beta' + 2\gamma'\right)\Phi'\right] - \mu^2\Phi = -\kappa\sigma e^{\alpha}.$$

En utilisant certaines des identités de Bianchi, ainsi que nous l'indiquons à l'appendice A en (A.7)... (A.10), on trouve la relation suivante :

(2.31) $$e^{-2\beta}\left[\Phi'' + \left(\frac{2}{r} - \alpha' - \beta' + 2\gamma'\right)\Phi'\right]\Phi' - \mu^2\Phi\Phi' = -\frac{\alpha'}{\tau}\rho e^{2\alpha}.$$

Par comparaison de (2.30) (2.31) on obtient :

(2.32) $$\rho\left(e^{\alpha}\right)' - \tau\kappa\sigma\Phi' = 0.$$

Comme cette relation a été déduite à l'aide des identités de Bianchi il sera possible, dans la suite de la substituer, éventuellement, à l'une des équations d'Einstein intérieures (2.25) (2.26) (2.27) et de constituer ainsi un nouveau système équivalent.

2 2 3 Formulation explicite des équations de champ.

En vue de formuler explicitement d'une façon assez simple les équations de champ nous allons faire intervenir, comme intermédiaires de calcul, les coefficients de la métrique conforme $d\bar{s}^2$ -interprétée, au chapitre II, comme métrique d'espace - :

$$d\bar{s}^2 = \xi^2 d\hat{s}^2 \quad \text{où} \quad d\hat{s}^2 = \sum_i (\omega^i)^2$$

c'est-à-dire, compte tenu de (2.21) et (2.22) :

(2.33) $$d\bar{s}^2 = e^{2B}dr^2 + r^2 e^{2\gamma} d\Sigma^2$$

avec

(2.34) $$B = \beta + \alpha \qquad C = \gamma + \alpha .$$

Le système de coordonnées reste encore partiellement indéterminé; pour le préciser, il faut ajouter aux équations de champ , une relation compatible avec les conditions de raccordement. Diverses possibilités existent, nous retiendrons le choix suivant, à savoir, que les coordonnées x, y, z liées à r, θ, φ par les formules :

$$(2.35)\qquad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases},$$

soient harmoniques. Cette propriété s'exprime par la relation :

$$(2.36)\qquad \left(\frac{2}{r} + 2C' - B'\right) e^{-2B} - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0 .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le système complet des équations indépendantes régissant les champs à la base de notre modèle.

. La première équation se déduit par combinaison linéaire de (2.25) (2.26) (2.27); elle s'écrit symboliquement :

$$\frac{1}{2}(S_{22}) + \frac{1}{2}(S_{11}) + (S_{33}) = -(B + 2C) = \frac{\chi}{2}(\rho + p + 3q)$$

et explicitement, compte tenu de (2.36) :

$$(2.37)\qquad \alpha'' e^{-2B} + \frac{2}{r}\alpha' e^{-2C} = \frac{1}{2}\chi \xi^{-2}\left[\rho - \tau\left(e^{-2B}\Phi'^2 + 2\mu^2 \xi^{-2}\Phi^2\right)\right].$$

. La deuxième est (2.26) :

$$(2.38)\qquad \left[\left(\frac{1}{r} + C'\right)^2 - \alpha'^2\right] e^{-2B} - \frac{e^{-2C}}{r^2} = \chi \xi^{-2} p$$

. La troisième est la transcription de (2.30), compte tenu de (2.34) et (2.36) :

$$(2.39)\qquad \Phi'' e^{-2B} + \frac{2}{r}\Phi' e^{-2C} - 2\alpha'\Phi' e^{-2B} - \mu^2 \xi^2 \Phi = -\chi \xi^{-2} \sigma .$$

. La quatrième est l'équation d'équilibre (2.32) :

$$(2.40)\qquad \rho \xi' - \tau \chi \sigma \Phi' = 0 .$$

. Enfin la cinquième équation est la condition d'harmonicité :

$$(2.41)\qquad \left(\frac{2}{r} + 2C' - B'\right) e^{-2B} - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0 .$$

Précisons les formes prises par ce système selon que l'on considère l'intérieur ou l'extérieur de la distribution matérielle.

a) Cas intérieur

Le système précédent fait intervenir ρ , la densité de matière et σ' , la densité de " charge vectorielle "; il est physiquement correct d'admettre la proportionnalité de ces grandeurs :

(2.42) $$\sigma' = k\rho .$$

On décrit, ce faisant un schéma matériel homogène. Compte tenu de cette relation, le système (2.37)... (2.41) revêt la forme suivante :

(2.43) $$\left(\Phi'' + \tau\chi k\Phi'\xi^{-1}\right)e^{-2B} + \frac{2}{r}\Phi' e^{-2C} + \bar{\chi}^2\Phi\xi^{-2}\left(1 - 2\tau\chi k\Phi\xi^{-1}\right) = 0$$

(2.44) $$\left[\left(\frac{1}{r} + C'\right)^2 - \alpha'^2\right]e^{-2B} - \frac{1}{r^2}e^{-2C} = \chi\xi^{-2}p$$

(2.45) $$\xi' - \tau\chi k\Phi' = 0$$

(2.46) $$\left(\frac{2}{r} + 2C' - B'\right)e^{-2B} - \frac{2}{r}e^{-2C} = 0$$

(2.47) $$\bar{\chi}^2\Phi\xi^{-1}\left(\frac{1 + \mu^2\bar{\chi}^2}{\chi k} - 2\tau\Phi\xi^{-1}\right) + \tau\Phi'^2 e^{-2B} = \rho .$$

On a posé :

(2.48) $$\bar{\chi}^2 = -\frac{\chi\mu^2}{1 + 2\tau\chi^2 k^2} .$$

Indiquons que les équations (2.43) (2.47) sont déduites de (2.37) (2.39) en tenant compte de (2.40) et (2.42).

b) Cas extérieur

Le système des équations relatif aux cas extérieur s'obtient à partir de (2.37)... (2.41) en annulant ρ et σ' ; il s'écrit :

(2.49) $$\Phi'' e^{-2B} + \frac{2}{r}\Phi' e^{-2C} - 2\alpha'\Phi' e^{-2B} - \mu^2\xi^{-2}\Phi = 0$$

(2.50) $$\alpha'' e^{-2B} + \frac{2}{r}\alpha' e^{-2C} = -\frac{1}{4}\chi\tau\xi^{-2}\left(\Phi'^2 e^{-2B} + 2\mu^2\Phi^2\xi^{-1}\right)$$

(2.51) $$\left[\left(\frac{1}{r} + C'\right)^2 - \alpha'^2\right]e^{-2B} - \frac{1}{r^2}e^{-2C} = \chi\xi^{-2}p$$

$$(2.52) \qquad \left(\frac{2}{r} + 2C' - B'\right) e^{-2B} - \frac{2}{r} e^{-2C} = 0.$$

2 2 4 Caractérisation des solutions recherchées.

Aux systèmes d'équations intérieurs et extérieurs précédents il convient d'ajouter certaines conditions propres à caractériser complètement les fonctions ρ, α, B, C et Φ sur lesquelles ils portent.

On impose d'une part, les conditions aux limites suivantes :

. à l'origine ρ, α, B, C et Φ devront être finies,

. lorsque r tend vers l'infini α, B, C et Φ devront tendre vers zéro; on requiert, d'autre part, la continuité des fonctions α, B, C et Φ solutions des équations intérieures et extérieures, et de leurs dérivées premières à la surface de raccordement.

Ces conditions visent à assurer : primo, la régularité des coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique dans tout l'intervalle des valeurs de r et secondo, le comportement asymptotiquement minkowskien de l'espace-temps à l'infini spatial.

III. RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS DE CHAMP.

3 1. - Ecriture approchée des équations de champ.

Nous nous proposons maintenant de déterminer une solution approchée des systèmes d'équations intérieures et extérieures précédemment obtenues. A cette fin, nous allons reformuler les équations composant ces systèmes en écrivant chacune des fonctions inconnues sous forme d'un développement limité au second ordre par rapport à un paramètre ζ, sans dimension, qui sera déterminé concrètement, dans la suite, en requérant que, au premier ordre, il y ait coïncidence entre les résultats de la présente théorie et ceux de la théorie newtonienne, exposée en section I.

On pose ainsi :

$$(3.1) \qquad \Phi \simeq \zeta \Phi_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \Phi_2 ;$$

$$(3.2) \qquad \alpha \simeq \zeta \alpha_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \alpha_2$$

d'où

$$\xi^2 \equiv e^{-2\alpha} \simeq 1 - 2\zeta\alpha_1 + \zeta^2(2\alpha_1^2 - \alpha_2);$$

(3.3) $$\rho \simeq \zeta \rho_1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \rho_2 .$$

On pourrait poser également, pour B et C :

$$B \simeq \zeta B_1 + \frac{1}{2}\zeta^2 B_2 \quad , \quad C \simeq \zeta C_1 + \frac{1}{2}\zeta^2 C_2$$

cependant la résolution au premier ordre des équations (2.44) (2.46) et (2.51) (2.52) effectuée en choisissant des valeurs centrales $B_1(0)$ et $C_1(0)$ nulles, mène à des fonctions B_1 et C_1 identiquement nulles, aussi bien sommes-nous conduit à écrire :

(3.4) $$B \simeq \frac{1}{2}\zeta^2 B_2 \qquad C \simeq \frac{1}{2}\zeta^2 C_2 .$$

On met ainsi en évidence, grâce au choix d'une condition de coordonnées convenable (2.36), au niveau même de son expression - (2.33) (3.4) - une propriété remarquable de la métrique conforme (2.33) : à savoir, qu'elle est osculatrice en chaque point à la métrique euclidienne, par rapport au développement en puissances d'un paramètre - en l'occurence ζ - des coefficinets $g_{\mu\nu}$, de Φ et de ρ .(1)

Reportant les développements précédents dans les équations (2.43)... (2.47), (2.49)... (2.52) on obtient, après séparation des termes d'ordre un et deux en ζ , les équations suivantes :

3 1 1 Cas intérieur

(3.5) $$\Phi_1'' + \frac{2}{r}\Phi_1' + \bar{\chi}^2 \Phi_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1'' + \frac{2}{r}\alpha_1' = \frac{1}{2}\rho_1$$

(3.6) $$\alpha_1' - r\,\chi\hbar\,\Phi_1' = 0$$

(3.7) $$\rho_1 = \frac{\bar{\chi}^2 + \mu^2}{\chi\hbar}\,\Phi_1 ;$$

(3.8) $$\Phi_2'' + \frac{2}{r}\Phi_2' + \bar{\chi}^2 \Phi_2 = 2r\,\chi\hbar\,\Phi_1'^2 + 4\bar{\chi}^2\left(\Phi_1\alpha_1 + r\,\chi\hbar\,\Phi_1^2\right)$$

(3.9) $$\alpha_2' - 2\alpha_1\alpha_1' - r\,\chi\hbar\,\Phi_2' = 0$$

(3.10) $$\frac{1}{r^2}\left(C_2 - B_2\right) + \frac{1}{r}C_2' - \alpha_1'^2 = \frac{1}{2}r\left(\Phi_1'^2 - \mu^2\Phi_1^2\right)$$

---

(1) Voir chapitre II, paragraphes 1 3 et 2 3 , pour une étude générale de cette propriété.

(3.11) $\frac{4}{\pi}(\zeta_1 - \beta_1) - \beta_1' + 2\zeta_1' = 0$

(3.12) $\rho_1 = \frac{\bar{\lambda}^2+\mu^2}{\kappa k}\left(\phi_1 - 2\alpha_1\phi_1\right) - 4\tau\bar{\lambda}^2\phi_1' + 2\tau\phi'^2.$

3 1 2 Cas extérieur

(3.13) $\phi_1'' + \frac{2}{\pi}\phi_1' - \mu^2\phi_1 = 0$

(3.14) $\alpha_1'' + \frac{2}{\pi}\alpha_1' = 0$

(3.15) $\phi_2'' + \frac{2}{\pi}\phi_2' - \mu^2\phi_2 = 4(\alpha_1'\phi_1' - \mu^2\alpha_1\phi_1)$

(3.16) $\alpha_2'' + \frac{2}{\pi}\alpha_2' = -\chi\tau\left(\phi_1'^2 + 2\mu^2\phi_1^2\right).$

3 2. Solutions approchées des équations du champ

3 2 1 Premier ordre

Pour retrouver au premier ordre les résultats de la théorie newtonienne, ainsi que cela a été requis, on constate, par rapprochement des équations, (1.6)(1.4)(1.5) - (1.7)(1.8) et (3.5)(3.6)(3.7) - (3.13)(3.14) qu'il suffit de poser :

(3.17) (a) $V_N = c^2\zeta\alpha_1$, (b) $\phi_N = \zeta\phi_1$, (c) $\rho_N = \zeta\rho_1$,

l'indice N faisant référence aux fonctions mentionnées en section I, et :

(3.18) $\kappa = -\frac{1}{\tau c^2} = 4\pi g$

de sorte que l'on a, d'après (1.10) et (2.48) :

(3.19) $\bar{\lambda}^2 = \lambda^2 = \frac{G}{k^2 g}\frac{\mu^2}{1-\frac{G}{k^2 g}}.$

Nous choisissons comme paramètre ζ la quantité sans dimension $-\frac{V_N(0)}{c^2}$, soit :

(3.20) $\zeta = -\frac{V_N(0)}{c^2} \longrightarrow \alpha_1(0) = -1.$

Si l'on se reporte à l'expression de V_N en (1.21), [compte tenu de (1.12)

(1-23)] on en déduit l'écriture explicite de ζ :

$$\zeta = \frac{4\pi G}{\lambda^2 c^2}\,\rho(0)\left(1-\cos\lambda R\right). \qquad (3.21)$$

On voit que ζ est proportionnel à la densité centrale $\rho(0)$ qui est la donnée fondamentale du modèle à quelqu'ordre qu'on l'étudie; ceci signifie, en particilier que :

$$\rho(0) = \rho_N(0)$$

d'où il découle que :

$$\overset{i}{\rho}(0) = 0 \qquad (3.22)$$

3 2 2 Second ordre

Nous devons résoudre les équations (3.8) (3.15) pour Φ , (3.9) (3.16) pour α , (3.10) (3.11) pour B et C ; ce sont des équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre, l'obtention des solutions se fait par une méthode classique bien connue. On trouve les expressions suivantes :

. Pour l'intérieur :

$$\overset{i}{\Phi} = \frac{\sin\lambda r}{\lambda r}\left(\overset{i}{b} + \int_0^r F u \cos\lambda u\, du\right) - \frac{\cos\lambda r}{\lambda r}\int_0^r F u \sin\lambda u\, du, \qquad (3.23)$$

$$c^2\overset{i}{\alpha} = c^2\overset{i}{\alpha}' - k\overset{i}{\Phi} + \overset{i}{\gamma} \qquad (3.24)$$

où l'on a posé :

$$F = 4\lambda^2\left(\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\Phi} - \frac{k}{c^2}\overset{i}{\Phi}'\right) - 2\frac{k}{c^2}\overset{i}{\Phi}' \qquad (3.25)$$

et compte tenu de (3.12), (3.22) :

$$\overset{i}{b} \equiv \overset{i}{\Phi}(0) = 2\overset{i}{\alpha}(0)\overset{i}{\Phi}(0) - 4\frac{\lambda^2 k}{c^2(\lambda^2+\mu^2)}\overset{i}{\Phi}(0) \qquad (3.26)$$

car $$\overset{i}{\Phi}'(0) = 0.$$

. Pour l'extérieur

$$\overset{e}{\Phi} = -\frac{e^{-\mu r}}{2\mu r}\left(\overset{e}{b} + \int_R^r H u e^{\mu u} du\right) - \frac{e^{\mu r}}{2\mu r}\int_r^\infty H u e^{-\mu u} du, \qquad (3.27)$$

(3.28) $$\overset{0}{\alpha}_1 = -\frac{GM}{c^2 r} - \int_r^\infty I\, u\, du + \frac{1}{r}\int_r^\infty I\, u^2\, du$$

où l'on a posé :

(3.29) $$H \equiv 4\left(\overset{0}{\alpha}_1'\overset{0}{\Phi}_1' - \mu^2\overset{0}{\alpha}_1\overset{0}{\Phi}_1\right),$$

(3.30) $$I \equiv 2\frac{G}{c^4 g}\left(\overset{0}{\Phi}_1'^2 + 2\mu^2\overset{0}{\Phi}_1^2\right).$$

Les expressions (3.23) (3.27) - (3.24) (3.28) des solutions $\overset{0}{\Phi}_1$ et $\overset{0}{\alpha}_1$ contiennent diverses constantes d'intégration $\overset{0}{b}_1$, $\overset{0}{M}_1$, $\overset{0}{\nu}_1$ dont les valeurs seront déduites du raccordement des solutions intérieures $\overset{i}{\Phi}_1, \overset{i}{\alpha}_1$ et extérieures $\overset{e}{\Phi}_1, \overset{e}{\alpha}_1$. Le prochain alinéa sera consacré précisément à l'exposé de la procédure correspondante.

Enfin on obtient pour $\overset{0}{B}_1$ et $\overset{0}{C}_1$ les expressions suivantes :

(3.31) $$\overset{0}{B}_2 = -\frac{4}{3}\int_r^\infty J u\, du + \frac{2}{3r^3}\int_0^r J u^4\, du,$$

(3.32) $$\overset{0}{C}_1 = -\frac{4}{3}\int_r^\infty J u\, du - \frac{1}{3r^3}\int_0^r J u^4\, du$$

avec

(3.33) $$J \equiv \overset{0}{\alpha}_1'^2 - \frac{G}{c^4 g}\left(\overset{0}{\Phi}_1'^2 - \mu^2\overset{0}{\Phi}_1^2\right).$$

L'écriture de ces solutions $\overset{0}{B}_1$ et $\overset{0}{C}_1$ est formellement identique qu'il s'agisse des cas intérieur ou extérieur ; il convient seulement de faire figurer dans l'expression J (3.33) les fonctions $\overset{i}{\alpha}_1$ et $\overset{i}{\Phi}_1$ ou $\overset{e}{\alpha}_1$ et $\overset{e}{\Phi}_1$ selon que r est inférieur au rayon de raccordement R ou, au contraire, qu'il l'excède.

3 2 3 Procédure de raccordement

Nous envisageons maintenant de décrire la procédure de raccordement des solutions approchées intérieures et extérieures précédemment obtenues. Il y a lieu de requérir la continuité des potentiels α, Φ_μ - c'est à dire de $\Phi_0 \equiv \Phi$ puisque $\Phi_1 \equiv 0$ - et celle de leurs dérivées premières à la surface de raccordement. La continuité de B, C et de leurs dérivées B', C' est alors, par suite, automatiquement assurée; pour s'en convaincre il suffit simplement de se

reporter aux expressions (3.31) (3.32) de β_1 , ζ_1 et de les expliciter, à la surface de raccordement, après avoir effectué les substitutions convenables dans J (3.33).

Soit R la valeur du rayon de la sphère de raccordement; nous devons avoir pour Φ , par exemple :

$$(3.34) \qquad \begin{cases} \overset{i}{\Phi}(R) = \overset{e}{\Phi}(R) \\ \overset{i}{\Phi}'(R) = \overset{e}{\Phi}'(R) . \end{cases}$$

Dans ces relations, les fonctions $\overset{i}{\Phi}$, $\overset{e}{\Phi}$ doivent être remplacées par leurs développements limités et, vu le résultat (1.16) de l'étude newtonienne, R écrit sous la forme (1).

$$(3.35) \qquad R \simeq R_0 + \zeta R_1 .$$

Il convient ensuite d'identifier les termes de même ordre en ζ disposés de part et d'autre des signes d'égalité en (3.34); on obtient ainsi :

. au premier ordre

$$(3.36) \qquad \overset{i}{\Phi}_1(R_0) = \overset{e}{\Phi}_1(R_0) \qquad , \qquad \overset{i}{\Phi}_1'(R_0) = \overset{e}{\Phi}_1'(R_0) ;$$

. au second ordre

$$(3.37) \qquad \overset{i}{\Phi}_2(R_0) = \overset{e}{\Phi}_2(R_0) \qquad \overset{i}{\Phi}_2'(R_0) - \overset{e}{\Phi}_2'(R_0) = 2 R_1 \left[\overset{e}{\Phi}_1''(R_0) - \overset{i}{\Phi}_1''(R_0) \right] .$$

Compte tenu de (3.17 ab), les conditions de raccordement au premier ordre sont évidemment satisfaites par les solutions newtoniennes obtenues à la section I; il n'y a pas lieu d'insister.

L'écriture développée des deux conditions (3.37), à l'aide des solutions $\overset{i}{\Phi}_2$, $\overset{e}{\Phi}_2$ données en (3.23) (3.27) et $\overset{i}{\Phi}_1$, $\overset{e}{\Phi}_1$ déduites des résultats de la section I, permet de déterminer d'abord la constante b , figurant en (3.27) puis R_1 , la modification du rayon R_0 . On trouve :

$$(3.38) \qquad b = -\frac{2\mu e^{\mu R_0}}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} \left(\overset{i}{b} + \int_0^{R_0} F u \cos\lambda u \, du + \frac{\mu}{\lambda} \int_0^{R_0} F u \sin\lambda u \, du \right) - e^{2\mu R_0} \int_{R_0}^{\infty} H e^{-\mu u} u \, du$$

et

$$(3.39) \qquad R_1 = -\frac{1}{2\lambda(1-\cos\lambda R_0)} \left\{ \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} \left[2\mu R_0 + \frac{1}{\lambda^2+\mu^2} \left(2\mu^2 + \frac{\mu}{R_0} + \frac{1}{R_0^2} \right) \right] \right.$$
$$\left. + 9 \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u} \, du - 4\lambda\mu^2 \frac{(1+\mu R_0) e^{2\mu R_0}}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}} \int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u} \, du \right\}$$

---

(1) - R_0 désigne le rayon de raccordement, issu de l'étude newtonienne, déterminé par (1.16).

La quantité b est explicitée simplement parce qu'elle intervient dans le calcul pratique aboutissant à l'expression de R_* . Les fonctions F et H , qui apparaissent dans son écriture, sont données en (3.25) et (3.29)

L'étude du signe de l'expression figurant au second membre de (3.39) faite à l'appendice B, montre que R_* est négatif quelles que soient les valeurs des constantes μ , g et k pourvu que $\frac{G}{k^2 g} < 1$. Il en résulte donc que la valeur (3.35) du rayon R de la sphère limitant la configuration matérielle, déduite, au second ordre près de l'étude relativiste de notre modèl est moindre que celle résultant de l'étude newtonienne. La valeur de R dépend de celles des constantes α , μ , g, k caractéristiques des champs à la base du modèle , et en outre - à la différence de R (1.16) - de la densité centrale $\rho(0)$ par l'intermédiaire de ζ (3.21).

Les relations de raccordement afférentes à $\overset{1}{\alpha}$ et $\overset{2}{\alpha}$, (3.24) (3.28), seront écrites et exploitées au cours de la prochaine section dans laquelle elles s'insèrent tout naturellement comme on le verra.

IV. MASSE TOTALE.

4 1. - Etude de la masse grave en seconde approximation. Existence d'une valeur maximum.

4 1 1 Expression de la masse

Considérons la solution de Schwarzschild écrite en coordonnées harmoniques :

$$(4.1)\qquad ds^2 = -\frac{1-\frac{GM}{c^2 r}}{1+\frac{GM}{c^2 r}}c^2 dt^2 + \frac{1+\frac{GM}{c^2 r}}{1-\frac{GM}{c^2 r}} + \left(1+\frac{GM}{c^2 r}\right)^2 r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

Le coefficient que nous avions noté $e^{2\alpha}$ dans la formulation générale (2.19), se trouve valoir ici :

$$(4.2)\qquad e^{2\alpha} = \frac{1-\frac{GM}{c^2 r}}{1+\frac{GM}{c^2 r}} .$$

La quantité M, masse grave du corps source du champ gravitationnel, peut être écrite comme suit :

(4.3) $$M = \frac{c^2}{2G} \lim_{r \to \infty} \left[r \left(1 - e^{2\alpha} \right) \right] .$$

Nous allons retenir cette expression comme donnant la valeur de la masse, telle qu'elle serait mesurée en termes du mouvement d'une particule d'épreuve à l'infini et l'appliquer à notre étude.

Nous avions posé, en (3.2) :

$$\alpha \simeq \zeta \alpha_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \alpha_2 ,$$

il en résulte l'expression approchée de M suivante :

(4.4) $$M \simeq - \frac{c^2}{G} \lim_{r \to \infty} \left\{ r \left[\zeta \alpha_1 + \zeta^2 \left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \right] \right\} .$$

Remplaçant α_1 par son expression déduite de (1.22) compte tenu de (3.17 a) et α_2 par (3.28), on obtient, après passage à la limite :

(4.5) $$M \simeq \zeta M_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 M_2$$

Dans cette formule le permier terme ζM_1 est connu, c'est la masse M_N , donnée en (1.24), résultant de l'étude newtonienne; le second $\frac{1}{2} \zeta^2 M_2$ exprime, au troisième ordre près, la correction de masse introduite par l'étude relativiste de notre modèle; nous allons le déterminer. Pour ce faire, on calcule M_2 en exploitant la relation de raccordement suivante, portant sur α_2

(4.6) $$\alpha_2'(R) - \alpha_2'(R) = 2R \left[\alpha_1''(R) - \alpha_1''(R) \right]$$

où figurent les fonctions α_1 , α_2 notées en (3.24) (3.28), R en (3.39) et α_1 , α_2 déduites de (1.21) (1.22) compte tenu de (3.17 a). Le résultat obtenu est :

(4.7) $$M_2 = - \frac{c^2}{G(1 - \cos \lambda R)^2} \left\{ \frac{1 + \mu R}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{3 + 4 \mu R}{R (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{4 \lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} + \frac{\mu^2 + 2\lambda^2 \mu R}{R (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \right. \right.$$

$$\left. + 3 \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} \, du \right] + \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left[\frac{2\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}} \left(R + \frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2} \right) + \frac{3}{\lambda} \int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \, du}{u} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\lambda^2 \mu}{(\lambda^2 + \mu^2)^2} \left[1 + 4 \mu R (1 + \mu R) e^{2\mu R} \int_R^\infty \frac{e^{-2\mu u}}{u} \, du \right] \right] \right\}$$

La comparaison, faite à l'appendice C, des divers termes composant l'expression de la constante M_2', permet de conclure que celle-ci est négative pour toutes les valeurs de μ, g et k satisfaisant à $\frac{G}{R^2 g} \ll 1$.

4 1 2 Constatation d'un maximum de masse.

L'examen de l'expression (4.5) montre l'existence d'une valeur maximum M_{Max} pour la masse M. Ce maximum est caractérisé comme suit, pour $\zeta = \zeta_{Max}$, valeur de ζ correspondant à M_{Max}, nous avons :

$$\left(\frac{dM}{d\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{Max}} = M_1 + \zeta_{Max} M_1' = 0 \qquad (4.8)$$

d'où il résulte :

$$\zeta_{Max} = -\frac{M_1}{M_1'} \qquad \text{et} \qquad M_{Max} = -\frac{1}{2}\frac{M_1^2}{M_1'} .$$

A l'aide de $M_1 = \frac{M_N}{\zeta}$, déduit de (1.24) et (3.21), et de M_2' (4.7) on détermine explicitement ζ_{Max} :

$$\zeta_{Max} = (1-\cos\lambda R_0)\left\{1 + \frac{3+4\mu R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2+2\lambda^2\mu R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\right.$$

$$+ g\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^2 u\cos u}{u}\,du + \frac{\mu}{1+\mu R_0}\left[\frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}}\left(R_0+\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right) + \frac{g}{\lambda}\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^3 u\,du}{u}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\lambda^2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left[\frac{1}{1+\mu R_0} + 4\mu R_0 e^{2\mu R_0}\int_{R_0}^{\infty}\frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du\right]\right\}^{-1}. \qquad (4.9)$$

L'étude de la valeur numérique de cette expression, effectuée à l'appendice C, permet de montrer que

$$\zeta_{Max} < 1 .$$

Des raisonnements précédents, il y a lieu de retenir que la masse totale M, déduite de la solution approchée des équations relativistes de notre modèle, d'une part, est inférieure, toutes choses égales d'ailleurs, à

M_N déduite de la solution des équations newtoniennes, et, d'autre part, présente un maximum de valeur pour une densité centrale $\rho^{(0)}_{Max}$, reliée à $\mathfrak{Z}_{Max}$ par (3.21).

4 2. - Energie du contenu matériel

4 2 1 Evaluation de la contribution des termes du second ordre.

La contribution du contenu matériel à l'énergie totale peut être exprimée comme suit :

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\nu \qquad (4.10)$$

où ρ désigne la densité de matière, $d\nu$ l'élément de volume tri-dimensionnel riemannien relatif à la "métrique d'espace" $d\hat{s}^2$ et $\mathcal{V}$ le volume, limité par la surface sphérique de rayon R , contenant la distribution matérielle.

En remplaçant $d\nu$ par son expression, au second membre de (4.10), on obtient la formulation explicite suivante :

$$m = \int \rho \sqrt{\hat{g}} \, dr \, d\theta \, d\varphi \qquad (4.11)$$

où $\sqrt{\hat{g}}$, calculé à partir de (2.33), s'écrit :

$$\sqrt{\hat{g}} = e^{-3\alpha} e^{B+2C} r^2 \sin\theta \, .$$

Substituant aux quantités ρ , α , B et C leurs développements limités respectifs notés en (3.3) (3.2) (3.4), de même à R le sien (3.35) et ne retenant que les termes du second ordre au plus, on aboutit, après intégration sur θ et φ , à l'expression de m suivante :

$$m = \mathfrak{Z} m_1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2 m_2 = 4\pi \left[\mathfrak{Z} \int_0^R \rho_1 r^2 dr + \tfrac{1}{2}\mathfrak{Z}^2 \int_0^R \left(\rho_2 - 6\rho_1 \frac{\dot{q}_1}{q_1} \right) r^2 dr + \mathfrak{Z}^2 \rho_1(R) R_0^2 R_1 \right] . \qquad (4.12)$$

Trois termes composent cette expression : le premier, du premier ordre, est connu c'est $M_N = \mathfrak{Z} M_1 = \mathfrak{Z} m_1$, le troisième, du second ordre, est aussi connu puisque ses constituants le sont, enfin le deuxième, également du second ordre, doit être calculé. Le calcul à effectuer ne présentant pas de

difficulté, nous omettrons de le rapporter, passant directement à l'énoncé du résultat que nous écrivons comme suit :

$$M_1 = m_1$$

$$(4.13) \qquad M_2 = m_2 - \frac{c^2}{\lambda^4 k^2 g (1-\cos\lambda R_0)^2}\left\{\mu(1+\mu R_0)\left[1 + \frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{\mu^2}{R(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\lambda^2\mu^2 R}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{3\lambda\mu^2}{R(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\right\}.$$

Il apparaît ainsi que la contribution du second ordre $\frac{1}{2}\zeta^2 M_2$ à l'énergie totale M se compose d'un premier terme $\frac{1}{2}\zeta^2 m_2$ qui exprime la contribution du second ordre à l'énergie matérielle m et d'un second, négatif, déduit du crochet ci-dessus, qui ne peut que représenter l'énergie des champs gravitationnel et vectoriel.

4 2 2 Comparaison de M avec m.

Si nous faisons l'hypothèse que $\frac{G_1}{k^2 g}$ est très nettement inférieur à l'unité [1] (notation : $\frac{G_1}{k^2 g} \ll 1$) alors un procédé, sensiblement analogue à celui développé à l'appendice C, permet de montrer que m_2 est négatif. Il en résulte que m, comme M, présente un maximum de valeur dont les "coordonnées" sont :

$$(4.14) \qquad \zeta_{max} = -\frac{m_2}{m_1} \quad \text{et} \quad m_{max} = -\frac{m_1^2}{2 m_2} .$$

Compte tenu de (4.13) il est facile de comparer les valeurs maxima de M et m ainsi que celles de ζ qui leur correspondent ; on obtient, ce faisant :

. pour les valeurs du paramètre ζ, avec des notations évidentes

$$(4.15) \qquad (m) \qquad \zeta_{max} > \zeta_{Max} \qquad (M)$$

. pour les valeurs maxima de M et m

$$(4.16) \qquad m_{max} > M_{Max} .$$

---

(1) - On a déjà supposé, en (1.19), que $\frac{G_1}{k^2 g} < 1$.

Les variations comparées de M et m semblent donc montrer que l'énergie totale M croît dans une moindre proportion que celle de son contenu matériel m, lorsque la densité centrale $\rho(0)$ augmente ; ceci vaut tout au moins lorsque $\frac{G}{\hbar^2 g} \ll 1$ et pour $\zeta \ll 1$.

4 3. - Exemple

En vue de compléter l'étude formelle précédente, nous allons préciser numériquement les résultats obtenus, permettant ainsi d'en apprécier plus correctement l'intérêt. Comme il s'agit seulement d'indiquer des ordres de grandeur, nous prenons pour les constantes $\hbar$, g et μ des valeurs telles que:

(4.17) $$\frac{G}{\hbar^2 g} = 10^{-42} \qquad \text{et} \qquad \mu = 10^{13}\,cm^{-1}.$$

Par ailleurs, la constante de gravitation et la vitesse de lumière valent :

$$G = 6{,}67\ 10^{-8}\,cm^3\,g^{-1}s^{-1}, \qquad c = 3.10^{10}\,cm\,s^{-1}.$$

La formule (3.19), compte tenu de (4.17), peut être écrite sous la forme :

$$\chi^2 \simeq \frac{G}{g\hbar^2}\,\mu^2$$

elle donne

(4.18) $$\lambda = 10^{-8}\,cm^{-1}.$$

On a ensuite, d'après (1.16) :

(4.19) $$\log \lambda R = -\frac{\lambda}{\mu} = -10^{-21} \longrightarrow \lambda R \simeq \pi$$

c'est-à-dire que R est de l'ordre de 3.000 km ; rappelons que le rayon solaire $R_\odot$ vaut $6{,}95\ 10^5$ km.

L'expression (3.21) du paramètre ζ, vu les valeurs numériques (4.17), se réduit à

(4.20) $$\zeta \simeq \frac{8\pi G}{c^4 \mu^2 \frac{G}{\hbar^2 g}}\,\rho(0) \qquad \text{soit} \qquad \zeta = 1{,}9\ 10^{-44}\,\rho(0).$$

Evaluons ζ_{Max}, valeur du paramètre pour laquelle la masse grave atteint son maximum. En raison du fait que $\frac{\zeta_x}{k^2 g} << 1$ l'expression (3.29) de ζ_{Max} peut être récrite comme suit :

$$(4.21) \qquad \zeta_{Max} \simeq 2\left(6 + 9 \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 u \cos u}{u} du + \frac{9}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 u \, du}{u} \right)^{-1}.$$

Au moyen de tables, on détermine les valeurs numériques des deux intégrales définies inclues dans la formule ci-dessus et l'on obtient $\zeta_{Max} \simeq \frac{1}{6}$. Grâce à (4.20), on trouve pour valeur de la densité centrale correspondante :

$$\rho^{(0)}_{Max} \simeq 10^{10} g \, cm^{-3}.$$

Déterminons maintenant la valeur de la masse maximum M_{Max} résultant des données (4.17). De la formule (4.8) il ressort que :

$$(4.22) \qquad M_{Max} = \frac{1}{2} \zeta_{Max} M_1$$

c'est-à-dire que M_{Max} est égale à la moitié de la valeur de la masse M_N, issue de l'étude newtonienne, calculée pour $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}_{Max}$. En raison de (4.18) (4.19), l'expression (1.24) donnant M_N peut être reformulée, de sorte que :

$$M_{Max} \simeq \frac{2\pi}{\chi^2} R \, \rho^{(0)}_{Max}$$

et, avec les valeurs de R et $\rho^{(0)}_{Max}$ déjà précisées, on obtient :

$$M_{Max} \simeq 1,8 \cdot 10^{35} g$$

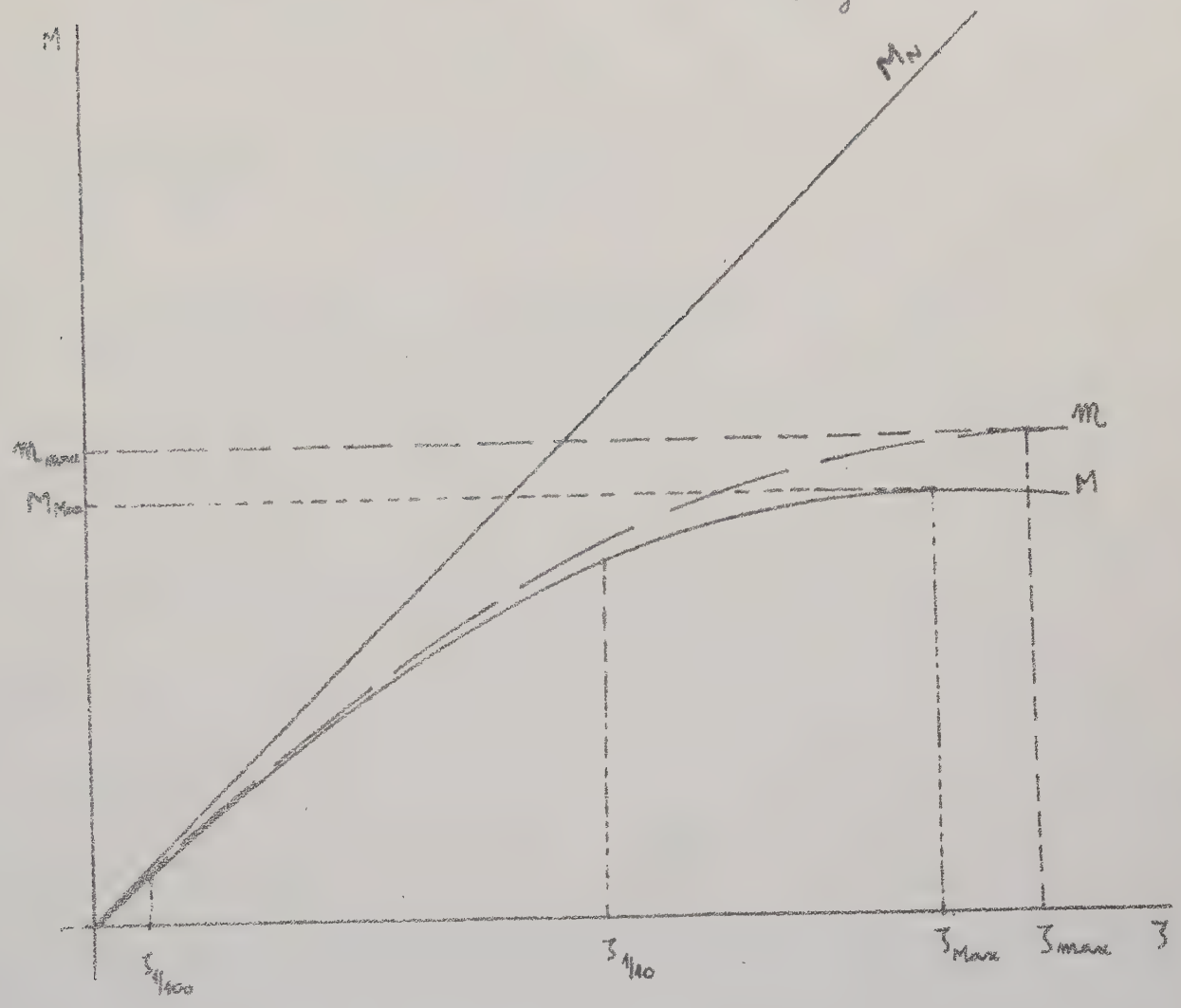
Si nous comparons ce chiffre à celui de la masse solaire :

$$M_\odot = 1,982 \cdot 10^{33} g$$

nous voyons que notre modèle conduit à des ordres de grandeurs de <u>plusieurs dizaines de masses solaires</u>.

Traçons maintenant le graphe de M en fonction de $\rho^{(0)}$:

$$M = \zeta M + \frac{1}{2}\zeta^2 M \qquad , \qquad \zeta = \frac{8\pi G}{c^4 \mu^2 \frac{G}{kg}} \rho^{(0)}$$



Points notés : $\{ \rho^{(0)}_{Max} \ , \ M_{Max} \}$

$\{ \zeta = \frac{1}{10} \ , \ \rho^{(0)} = 1,9 \cdot 10^{-10} \ g\,cm^{-3} \ , \ M_{1/10} = 1,5 \cdot 10^{55} \ g \}$

$\{ \zeta = \frac{1}{100} \ , \ \rho^{(0)} = 1,9 \cdot 10^{-8} \ g\,cm^{-3} \ , \ M_{1/100} = 1,8 \cdot 10^{53} \ g \}$

Sur cette courbe, nous avons porté les points correspondants à

$$\left\{ \rho^{(0)}_{Max} \ , \ M_{Max} \right\}$$

$$\left\{ \zeta = \frac{1}{10} \ , \ \rho^{(0)} = 1,9 \cdot 10^{10} \ g \ cm^{-3} \ , \ M_{1/10} = 1,5 \cdot 10^{35} \ g \right\}$$

et

$$\left\{ \zeta = \frac{1}{100} \ , \ \rho^{(0)} = 1,9 \ 10^{9} \ g \ cm^{-3} \ , \ M_{1/100} = 1,6 \cdot 10^{33} \ g \right\} .$$

A titre purement indicatif, nous avons ajouté le tracé de la courbe

$$m = \zeta m_1 + \frac{1}{2} \zeta^2 m_2$$

dans le but seulement de préciser graphiquement les situations respectives des points représentatifs de M_{Max} et m_{max} .

4 4. - Validité des solutions approchées utilisées

Tout au long des développements précédents, nous avons eu recours à des solutions approchées, des équations relativistes de notre modèle, dont il convient maintenant d'apprécier la validité.

Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas où, comme dans l'exemple traité au paragraphe 43, les constantes g et k sont telles que :

$$(4.22) \qquad \frac{G}{k^2 g} \ll 1$$

ce qui entraîne, selon (4.18) (4.19) :

$$(4.23) \qquad \frac{\lambda}{\mu} \ll 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda R \simeq \pi .$$

Nous allons examiner, dans ces conditions, les expressions de $\dot{\Phi}$, $\dot{\alpha}$ et $\overset{e}{\dot{\Phi}}$, $\overset{e}{\dot{\alpha}}$ en vue de préciser l'ordre de grandeur de chacun des deux termes les composant ; puis de même pour celles de B et C qui ne comportent qu'un terme du second ordre. Considérons en premier lieu Φ :

$$(4.24) \qquad \Phi(r) \simeq \zeta \overset{1}{\Phi}(r) + \frac{1}{2} \zeta^2 \overset{2}{\Phi}(r)$$

que l'on peut encore écrire :

$$(4.25) \qquad \Phi(r) \simeq \overset{1}{\dot{\Phi}}(0) \left[\zeta \frac{\overset{1}{\Phi}(r)}{\overset{1}{\dot{\Phi}}(0)} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\overset{2}{\Phi}(r)}{\overset{1}{\dot{\Phi}}(0)} \right] .$$

On a ainsi formé des quantités $\dfrac{\overset{1}{\Phi}(r)}{\overset{1}{\dot{\Phi}}(0)}$, $\dfrac{\overset{2}{\Phi}(r)}{\overset{1}{\dot{\Phi}}(0)}$, sans dimension, que nous allons étudier.

A l'aide des formules (1.9) (1.12) (1.13) (1.17) nous obtenons les expressions suivantes :

(4.26) $$\frac{\overset{i}{\Phi}(u)}{\overset{i}{\Phi}(e)} = \frac{\sin\lambda r}{\lambda r} \qquad , \qquad \frac{\overset{s}{\Phi}(r)}{\overset{s}{\Phi}(0)} = \frac{e^{-\mu(r-\beta)}}{r(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}}$$

d'après lesquelles le quotient $\frac{\overset{i}{\Phi}(r)}{\overset{i}{\Phi}(e)}$ décroît de façon monotone de 1 à 0, pour r allant de 0 à l'infini, en passant par la valeur $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}}$ pour $r = R$.

A partir de l'expression de $\overset{i}{\Phi}$, donnée en (3.23), on obtient ensuite compte tenu de (3.25) (3.26), (1.9) (1.12) :

(4.27) $$\frac{\overset{i}{\Phi}(u)}{\overset{i}{\Phi}(0)} = \frac{1}{1-\cos\lambda\beta}\left\{ g\left(\frac{\cos\lambda r}{\lambda r}\int_0^r \frac{\sin^3\lambda u}{u} - \frac{\sin\lambda r}{\lambda r}\int_0^r \frac{\sin^2\lambda u\cos\lambda u}{u}\right.\right.$$
$$+ \frac{\sin^2\lambda r}{\lambda^2 r^2} - 2\,\frac{\sin^3\lambda r\cos\lambda r}{\lambda^3 r^3}$$
$$+ \frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}}\left(\cos\lambda r + \frac{\sin\lambda r}{\lambda r} - 2\,\frac{\sin\lambda r\cos^2\lambda r}{\lambda r}\right)$$
$$\left.\left. - 2\,\frac{\sin\lambda r}{\lambda r}\left(1 + \frac{\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)\right\}$$

L'étude des termes composant cette expression, effectuée en tenant compte de l'hypothèse (4.22), permet de montrer que :

(4.28) $$\left|\frac{\overset{i}{\Phi}(r)}{\overset{i}{\Phi}(0)}\right| < 5 \qquad \text{pour} \qquad r \in [0, R] .$$

Nous avons aussi considéré $\frac{\overset{s}{\Phi}(r)}{\overset{s}{\Phi}(0)}$ et il résulte de notre analyse, qu'au total :

(4.29) $$\left|\frac{\overset{s}{\Phi}(r)}{\overset{s}{\Phi}(0)}\right| < 5 \qquad \text{pour} \qquad r \in [0, \infty[.$$

Les quantités $\alpha_1(r)$, $\alpha_2(r)$, $\beta_2(r)$, $\zeta_2(r)$ ont également été étudiées et les bornes suivantes mises en évidence

(4.30) $$|\alpha_1(r)| < 1 \qquad , \qquad |\alpha_2(r)| < 4$$
$$|\beta_2(r)| < 1{,}6 \qquad , \qquad |\zeta_2(r)| < 1$$
pour
$$r \in [0, \infty[.$$

Conclusion - De cette brève analyse, il résulte que les solutions approchées obtenues restent encore relativement satisfaisantes pour des valeurs du paramètre de l'ordre de ζ_{Max} . Malgré tout il est bien difficile d'être tout à fait affirmatif quant à l'existence de la masse limite M_{Max} sans avoir quelques renseignements sur le comportement des termes d'ordre supérieur des développements limites utilisés.

V. - PRESSION - EQUATION DE COMPRESSIBILITE EFFECTIVE

5 1. - Position et solution du problème

Dans cette dernière section, nous envisageons de répondre à la question suivante : quelle pression isotrope p conviendrait-il de substituer au champ vectoriel Φ_d pour que l'équilibre de la configuration subsiste avec la distribution de matière fixée par la fonction densité $\rho(r)$? Ou encore, en d'autres termes : le modèle, que nous venons d'étudier pourrait-il également être décrit par un schéma fluide parfait accompagné d'une équation de compressibilité ? Et laquelle ?

Nous nous proposons de résoudre le problème posé au premier ordre significatif seulement, c'est-à-dire en des termes purement newtoniens. Le point de départ est l'équation d'équilibre bien connue :

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2} \rho(r) \qquad (5.1)$$

où p désigne la pression, ρ la densité de matière et $M(r)$ la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon r, soit :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(u)\, u^2\, du \,. \qquad (5.2)$$

A la relation (5.1), on peut substituer la suivante, écrite à l'aide du potentiel newtonien $V(r)$:

$$\frac{dp}{dr} = - \rho(r) \frac{dV}{dr} \,. \qquad (5.3)$$

Si maintenant on remplace $\frac{dV}{dr}$ par son expression déduite des formules (1.4) (1.5) (1.10), on obtient :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G}{\lambda^2} \rho \frac{d\rho}{dr} \,. \qquad (5.4)$$

Cette relation peut être immédiatement intégrée en tenant compte du fait que la pression p doit s'annuler à la surface de la sphère de rayon R ; il vient ainsi :

$$p = \frac{2\pi G}{\lambda^2} \left[\rho^2(r) - \rho^2(R) \right] \,. \qquad (5.5)$$

5 2. - Commentaires

L'équation de compressibilité, obtenue ci-dessus, présente une forme particulière ; en effet, le modèle de configuration statique à symétrie sphérique, auquel elle conduirait, dépendrait de deux paramètres : la densité centrale, comme il est usuel, et la densité périphérique $\rho(R)$, ce qui l'est moins. Bien que déduite par un raisonnement fort élémentaire, cette équation a ainsi un aspect non strictement local que l'on peut penser devoir être également présent dans une théorie générale plus élaborée.

Notons enfin que l'équation (5.5) conduit à une expression de la vitesse du son v satisfaisante ; en effet, nous avons :

$$v = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{1/2} = \left[\frac{4\pi G}{\lambda^2}\ \rho(a)\right]^{1/2} ,$$

quantité dont le maximum $\left[\frac{4\pi G}{\lambda^2}\ \rho(0)\right]^{1/2}$ vaut, d'après les données numériques du paragraphe 43 : 9.10^3 cm s^{-1} soit une valeur inférieure à la vitesse de la lumière c, donc bien admissible.

A P P E N D I C E S

A. Composantes du tenseur de courbure. Identités de Bianchi.

1) Les quantités $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ sont les composantes du tenseur de courbure, rapportées au repère orthonormé déduit de (2.19). Indiquons brièvement le calcul permettant de les expliciter. Partant de l'expression de la métrique :

$$ds^2 = -e^{2\alpha}dT^2 + e^{2\beta}dr^2 + r^2 e^{2\gamma}d\Sigma^2 \qquad (A.1)$$

où α, β, γ sont des fonctions de r seulement, on pose :

$$ds^2 = -(\omega^0)^2 + \sum_i (\omega^i)^2 \qquad (A.2)$$

avec

$$\omega^0 = e^{\alpha}dT \quad , \quad \omega^1 = e^{\beta}dr \quad , \quad \omega^2 = re^{\gamma}d\theta \quad , \quad \omega^3 = r\sin\theta e^{\gamma}d\varphi \qquad (A.3)$$

Ensuite on détermine les composantes $(\omega^i{}_j)$ de la connexion riemannienne correspondante :

$$(A.4) \quad \begin{cases} \omega^0{}_1 = \alpha' e^{-\beta}\omega^0 & \omega^2{}_1 = (1 + r\gamma')e^{-\beta}\omega^2 \\ \omega^1{}_2 = -\dfrac{e^{-\gamma}}{r}\cot g\,\theta\,\omega^2 & \omega^3{}_1 = \left(\dfrac{1}{r} + \gamma'\right)e^{-\beta}\omega^3 \end{cases}.$$

Calculant enfin les 2-formes de courbure Ω_{ij} on obtient :

$$(A.5) \quad \begin{cases} \Omega^0{}_1 = A\,\omega^0 \wedge \omega^1 & \Omega^2{}_3 = D\,\omega^2 \wedge \omega^3 \\ \Omega^0{}_2 = C\,\omega^0 \wedge \omega^2 & \Omega^3{}_1 = B\,\omega^3 \wedge \omega^1 \\ \Omega^0{}_3 = C\,\omega^0 \wedge \omega^3 & \Omega^1{}_2 = B\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases},$$

en posant :

$$(A.6) \quad \begin{cases} A = -e^{-2\beta}(\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta') \\ B = -e^{-2\beta}\left[\gamma'' + \dfrac{2}{r}\gamma' + \gamma'^2 - \beta'\left(\dfrac{1}{r} + \gamma'\right)\right] \\ C = -e^{-2\beta}\alpha'\left(\dfrac{1}{r} + \gamma'\right) \\ D = -e^{-2\beta}\left(\dfrac{1}{r} + \gamma'\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}e^{-2\gamma}. \end{cases}$$

2) Identités de Bianchi. La formulation générale de ces identités est :

$$(A.7) \qquad d\,\Omega^{\alpha}{}_{\beta} = \Omega^{\alpha}{}_{\varsigma} \wedge \omega^{\varsigma}{}_{\beta} - \omega^{\alpha}{}_{\varsigma} \wedge \Omega^{\varsigma}{}_{\beta} .$$

En exprimant, par exemple, $d\,\Omega^{\circ}_{1}$ et $d\,\Omega^{\circ}_{2}$ on obtient :

$$(A.8) \qquad \begin{aligned} \underline{D}' + 2(\underline{D} - \underline{B})\left(\tfrac{1}{r} + \gamma'\right) &= 0 \\ \underline{C}' + \alpha'(\underline{C} - \underline{B}) + (\underline{C} - \underline{A})\left(\tfrac{1}{r} + \gamma'\right) &= 0 \end{aligned}$$

puis, par addition :

$$(A.9) \qquad (2\underline{C}' + \underline{D}') + 2\left[(2\underline{C} + \underline{D}) - (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C})\right]\left(\tfrac{1}{r} + \gamma'\right) + 2(\underline{C} - \underline{B})\alpha' = 0$$

d'où il résulte, compte tenu des équations du champ (2.25) (2.26) (2.27), la relation suivante :

$$(A.10) \qquad \left| \; p' + (p - q)\left(\tfrac{1}{r} + \gamma'\right) + \varsigma + p + q = 0 . \right.$$

Il suffit ensuite de substituer à p et q leurs expressions respectives notée en (2.28) et (2.29) pour obtenir l'équation écrite dans le développement en (2.31).

B. Etude du signe de R_1

Rappelons la valeur de R_1 (3.39)

$$(B.1) \qquad R_1 = -\frac{1}{2\lambda(1-\cos\lambda R_0)}\left\{\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left[2\mu R_0 + \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}\left(2\mu^2 + \frac{\mu}{R_0} + \frac{1}{R_0^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + 9\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u}\,du - 4\,\frac{2\lambda\mu^2(1+\mu R_0)\,e^{2\mu R_0}}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du\right\}$$

En appliquant la majoration suivante :

$$(B.2) \qquad \int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du < \frac{1}{R_0}\int_{R_0}^{\infty} e^{-2\mu u}\,du , \left(= \frac{e^{-2\mu R_0}}{2\mu R_0} \right) ,$$

on peut écrire (B.1) comme suit :

$$R_1 < -\frac{1}{2\lambda(1-\cos\lambda R_0)}\left\{\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left[2\mu R_0 + \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}\left(2\mu^2 + \frac{\mu}{R_0} + \frac{1}{R_0^2}\right)\right]\right.$$
$$\left. + 9\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u}\,du - \frac{2\lambda\mu^2(1+\mu R_0)}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\right\} ;$$

soit finalement :

$$R_1 < -\frac{1}{2\lambda(1-\cos\lambda R_0)}\left\{\frac{\lambda}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left(2\mu\lambda^2 R_0 + \frac{1+\mu R_0}{R_0^2}\right) + g\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^3 u}{u}\,du\right\}$$

L'expression entre crochets ne comporte que des termes positifs; le signe de R_1 est donc toujours négatif.

C. Etude du signe de M_2

Nous envisageons maintenant de montrer que M_2 est négatif et que $\zeta_{Max.} = -\frac{M_1}{M_2}$ est inférieur à un; comme $M_1 = \frac{M_N}{\zeta}$ est positif, il est équivalent de démontrer que $\zeta_{Max.}$ satisfait à la double inégalité

$$0 < \zeta_{Max.} < 1.$$

La valeur de $\zeta_{Max.}$ est (4.9):

$$\text{(C.1)}\quad \zeta_{Max.} = (1-\cos\lambda R_0)\left\{1 + \frac{3+4\mu R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2+2\lambda^2\mu^2 R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\right.$$
$$+ g\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^2 u\cos u\,du}{u} + \frac{\mu}{1+\mu R_0}\left[\frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left(R_0+\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right) + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^3 u\,du}{u}\right]$$
$$\left. - \frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left[\frac{\mu}{1+\mu R_0} + 4\mu^2 R_0 e^{2\mu R_0}\int_{R_0}^{\infty}\frac{e^{-2\mu u}}{u}\,du\right]\right\}^{-1}.$$

Notons Q l'expression entre les crochets et étudions son signe. Après usage de la majoration (B.2) cette quantité Q est bornée comme suit :

$$\text{(C.2)}\quad Q > \left\{1 + \frac{3+4\mu R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}} - \frac{\lambda^3\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}(1+\mu R_0)}\right.$$
$$\left. + g\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^2 u\cos u}{u}\,du + \frac{\mu}{\lambda(1+\mu R_0)}\left[\frac{2\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}}\left(R_0+\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right) + g\int_0^{\lambda R_0}\frac{\sin^3 u\,du}{u}\right]\right\}^{-1}.$$

Pour être en mesure de préciser le signe de Q il faut considérer la contribution apportée par l'intégrale :

$$\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du \quad .$$

Comme $\lambda R_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, on peut écrire l'inégalité suivante :

$$(C.3) \qquad \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du \quad .$$

Après avoir effectué le changement de variable d'intégration :

$$u = \pi - x \ ,$$

(C.3) s'écrit :

$$(C.4) \qquad \int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\pi - x}\, dx \quad .$$

Il est clair que le membre droit de (C.4) est positif; il en résulte que Q l'est aussi et ainsi on a la première conclusion :

$$(C.5) \qquad \mathcal{J}_{Max} > 0 \longrightarrow M_1 < 0$$

Revenons à $\mathcal{J}_{Max}$, compte tenu de l'application de (B.2), (C.2) devient

$$(C.6) \qquad \mathcal{J}^{-1}_{Max} > \frac{1}{1-\cos\lambda R_0}\left\{ 1 + \frac{3+4\mu R_0}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \frac{4\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu^2}{R_0(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}} \right.$$

$$- \frac{\lambda^2 \mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}(1+\mu R_0)} + g\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\, du$$

$$\left. + \frac{\mu}{1+\mu R_0}\left[\frac{2\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}}\left(R_0 + \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right) + \frac{g}{\lambda}\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u}\, du\right]\right\} .$$

Pour apprécier la valeur des deux intégrales inclues en (C.6) on est contraint de recourir à des tables; on constate, en usant de ce moyen, que :

$$\int_0^{\lambda R_0} \frac{\sin^3 u}{u}\, du > 0,6 \qquad \text{où} \quad \lambda R_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Il en résulte que (C.6) peut être modifié comme suit :

$$(C.7) \qquad \zeta^{-1}_{Max} > \frac{1}{1-\cos\lambda R}\left\{1 + \frac{4\mu}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu^2}{(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}(1+\mu R)}\left(R + \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}\right) + 9\int_0^{\lambda R} \frac{\sin^2 u \cos u}{u}\,du \right\}$$

et compte tenu des valeurs numériques données aux constantes g, h telles que $\frac{G}{h^2 g} << 1$, ce qui implique $\lambda << \mu$, dans l'exemple présenté au paragraphe 4°3 nous obtenons finalement le résultat :

$$\zeta^{-1}_{Max} > 1 .$$

Et donc la valeur ζ_{Max} satisfait la double inégalité annoncée :

$$0 < \zeta_{Max} < 1 .$$

R E F E R E N C E S

1 L. LANDAU . Physik Zeist. Sowjetunion, 1 , 285 (1932).

2 S. CHANDRASEKHAR . Monthly Notices, 95 , 222 (1935).

3 J.R. OPPENHEIMER et G.M. VOLKOFF . Phys. Rev., 55 , 374 (1939).

4 J.A. WHEELER, B.K. HARRISON, K.S. THORNE . "Gravitational Theory and Gravitational Collapse" Chicago, 1965.

5 YA.B. ZEL'DOVICH . J.E.T.P., 41 , 1609 (1961).

Autres études consultées :

S. BONAZZOLA et R. RUFFINI . Phys. Rev., 187 , 1767 (1969).

S. BONAZZOLA et F. PACINI . Phys. Rev., 148 , 1269 (1966).

R. RUFFINI . dans "Les Astres occlus", Les Houches 1972 - éd. Gordon and Breach.

Ouvrages généraux :

A. LICHNEROWICZ . "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme" éd. Masson, Paris (1955).

M.A. TONNELAT . "Les vérifications expérimentales de la relativité générale" éd. Masson, Paris (1964).

S. MAVRIDES . "L'univers relativiste" éd. Masson, Paris (1973).

S. CHANDRASEKHAR . "An introduction to the study of Stellar-structure" éd. Dover, New-York (1957).

ADDENDA

L'étude précédente porte sur un modèle de configuration statique de matière froide, bâtie à l'aide d'un champ vectoriel répulsif à courte portée. Nous pourrions en retrouver les aspects principaux en substituant, au champ vectoriel, un champ scalaire de même type. Ajoutons que l'emploi de ce dernier champ présente certaines difficultés spécifiques - on sait, en effet, que plusieurs théories du champ scalaire existent et ne s'accordent pas - cependant il est possible d'étayer convenablement un cadre théorique cohérent permettant la mise en oeuvre efficace de ce champ scalaire de telle façon qu'il soit répulsif. Précisons que ce second modèle donne, toutes choses égales d'ailleurs, une valeur maximum de la masse de 4.10^{35} g ; on relèvera que ce chiffre est sensiblement plus élevé que celui cité au cours de l'étude, soit $1, \ 10^{35}$ g

---

Les études que nous venons d'exposer - ou de mentionner - ont été relatées dans les publications suivantes :

L. BEL et B. LEAUTE . Annales de l'I.H.P., X , 317 (1969).

D. GERBAL et B. LEAUTE . Annales de l'I.H.P., X , 349 (1969).

C H A P I T R E II

- SINGULARITES , SOURCES DE QUELQUES SOLUTIONS STATIQUES OU STATIONNAIRES -

S O M M A I R E

pages

Introduction ..... II - 1

I. - ESPACE-TEMPS STATIONNAIRE - ESPACE 7

11. - Espace-temps stationnaire - Définition - Généralités 7

12. - Décomposition de la métrique de V_4 suivant $\mathcal{F}$ 8

13. - Equationsde champ 11

II. - QUELQUES APPLICATIONS DES NOTIONS D'ESPACE (V_3, $\mathcal{g}$) ET DE CHAMP DE GRAVITATION (E , B) 17

21. - Introduction 17

22. - Théorie de Dicke 18

23. - Champ scalaire 22

24. - Champ électro-magnétique 24

25. - Une classe particulière d'espaces-temps stationnaires - Un exemple : la solution de N.U.T. 28

III. - SINGULARITES, SOURCES DES SOLUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE .. 34

31. - Espace (V_3, $\mathcal{g}$) - Espace métrique associé (V_3^*, $\mathcal{d}^*$) 34

32. - Singularité de la métrique et des champs 36

33. - Identification des sources 38

34. - Sources de la solution de N.U.T. 41

VI. - SINGULARITES, SOURCES DE LA SOLUTION DE KERR 46

41. - Métrique d'espace-temps de Kerr - Expressions - Propriétés 46

42. - Espace (V_3, $\mathcal{g}$) - Espace métrique associé (V_3^*, $\mathcal{d}^*$) 56

43. - Singularité de la métrique et du champ gravitationnel 62

44. - Sources de la solution de Kerr 64

Appendice - Espaces métriques 71

Bibliographie 73

INTRODUCTION

A. La solution de Schwarzschild [1] a joué un rôle important pour la compréhension et la diffusion originelles de la théorie de la relativité générale. La structure géométrique, qu'elle assigne à l'espace-temps statique à symétrie sphérique, donna très tôt le moyen de confronter les prévisions théoriques et la réalité des mouvements observés dans le système solaire [2] . Et l'on peut dire que le succès de ces confrontations fit primitivement beaucoup pour consacrer le bien fondé de la théorie relativiste de la gravitation auprès de la communauté scientifique internationale. Depuis cette première période, cette métrique si simple d'expression * :

$$(1)\quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right),$$

et si fondamentale, n'a cessé d'être la source et l'objet de nombreux et intéressants travaux. Evidemment on ne pouvait manquer de s'interroger sur le fait que, pour la valeur $r = 2m$, g_{00} et g_{11} deviennent respectivement nul et infini et sur les implications physiques éventuelles de l'existence de cette singularité - dite de Schwarzschild - des composantes du tenseur métrique. Dans un premier temps on pensait qu'il dût en résulter un rayon gravitationnel minimum pour les objets gravitants; par ailleurs, à la même époque, toute préoccupation à ce sujet semblait devoir revêtir un intérêt purement théorique puisque aussi bien la valeur $r = 2m$ du"rayon de Schwarzschild " se trouvait être très inférieure à celle du rayon de tout objet céleste connu, ou même concevable.

Par la suite, les études sur cette question furent poursuivies et l'on en vint au point de vue, aujourd'hui le plus couramment adopté, suivant lequel la singularité de Schwarzschild n'a pas un caractère intrinsèque puisque le seul invariant de courbure : $K = \frac{m}{r^3}$, duquel tous les autres sont des fonctions régulières, a un comportement tout à fait normal pour la valeur $r = 2m$. Par contre en $r = 0$, lieu géométrique où K devient infini, se trouve une vraie singularité ou " singularité physique ". La discontinuité de certaines composantes $g_{\alpha\beta}$ ne détermine en $r = 2m$ qu'une singularité apparente. Le système de coordonnées (t, r, θ, φ) permet donc de décrire une partie seulement du domaine où la géométrie intrinsèque est régulière. On est ainsi

---

* Nous utilisons la signature + 2 et un système d"unités tel que $G = 1$, $c = 1$.

amené à envisager, comme le fait judicieusement J. Ehlers [3], les espaces-temps suivants :

$$(2)\quad \begin{cases} (a) & 2m < r < \infty \qquad (\text{où } m > 0) \\ (b) & 0 < r < 2m \end{cases}$$

avec, dans les deux cas : $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Le premier (a) est l'espace-temps statique bien connu, il n'y a pas lieu d'insister. Le second (b), moins souvent mentionné, représente un espace-temps dans lequel r est la coordonnée de temps et t une coordonnée d'espace. Comme $\frac{\partial}{\partial t}$ est un vecteur de Killing, les 3-espaces r = cte sont homogènes; ils sont non isotropes et pourvus d'une métrique évoluant dans le temps r. Cet espace-temps (b) présente une singularité intrinsèque pour le temps $r = 0$. Les espaces-temps définis en (a) et (b) sont l'un et l'autre géodésiquement incomplets car toute géodésique ne peut y être prolongée indéfiniment, au sens du paramètre affine, dans les deux directions. On peut alors se demander si ces espaces-temps peuvent être, ou non, étendus régulièrement. Plusieurs extensions ont été proposées, anciennement par G. Lemaitre [4], ensuite par D. Finkelstein [5], et, plus récemment, par M. Kruskal [6]. La variété, définie par Kruskal, fournit, si on la munit de la métrique déduite de (1) par la transformation $(t, r) \longrightarrow (u, v)$ caractérisant l'extension, une extension analytique, maximale, commune aux deux espaces-temps (a) et (b); certaines régions étant isométriques à l'un, d'autres à l'autre [3]. Selon les adeptes du point de vue que nous exposons - celui de l'extension - il y a lieu de poser en principe que tout point de l'extension $(\hat{V}_4, \hat{g})$, d'un espace-temps (V_4, g), doit être aussi considéré comme un point de l'espace-temps. Dans la situation qui nous occupe, on pourra donc, dans cette optique, désigner par espace-temps de Schwarzschild-Kruskal l'espace-temps à symétrie sphérique du vide.

L'une des conséquences importantes de cette analyse est, on le sait, la prévision de l'existence possible dans l'univers de zônes tout à fait inobservables directement - les trous noirs - comme stade ultime du processus d'effondrement gravitationnel de certaines étoiles. Ce phénomène devant nécessairement intervenir lorsque la masse, d'un objet céleste arrivé au terme de son évolution énergétique, excède une certaine valeur limite. (La détermination de cette valeur maximum a été étudiée au chapitre premier).

Les considérations qui viennent d'être développées concrètement à propos de la métrique de Schwarzschild ont une portée générale et vaudraient aussi,

mutatis mutandis, pour d'autres métriques. B. Carter [7] a étudié, précisément dans cette optique, la métrique de R.P. Kerr [8] et a obtenu son extension analytique maximale.

B. Le point de vue que nous venons d'exposer, bien qu'à certains égards, séduisant, n'est cependant pas exempt de critiques tant pour lui-même qu'en raison de certaines des conséquences qu'il implique. Les arguments de ceux qui le contestent, tendent évidemment à montrer que la singularité de Schwarzschild est bien effective et ne saurait être " éliminée " ou " dépassée ". Comme le fait observer S. Mavrides [9] un théorème de W. Israel [10] , en particulier, a suscité certains travaux dans ce sens. Cet auteur a établi que, parmi tous les espaces-temps statiques du vide, asymptotiquement plats, avec des surfaces équipotentielles $g_{oo} =$ cte simplement connectées et fermées, la solution de Schwarzschild est la seule qui possède un évènement-horizon $g_{oo} = 0$ non singulier. La régularité de cet évènement-horizon présente un caractère précaire puisqu'elle peut être remise en cause si, par exemple, une petite déviation statique est imposée à la source du champ [11] , etc... A.I. Janis, E.T.Newman et J. Winicour [12] ont tenté d'inclure la solution de Schwarzschild dans la catégorie de celles dont l'évènement-horizon est singulier. Pour ce faire, ils considèrent la solution à symétrie sphérique correspondant au champ de gravitation couplé avec un champ scalaire sans masse et montrent, en analysant le processus de passage à la limite du couplage zéro, que la " sphère " de Schwarzschild devient un point singulier. Une argumentation un peu comparable est développée par F.I. Cooperstock et G. Junevicus [13] qui font observer que les invariants de courbure, déduits des métriques de Bach et Weyl, deviennent indéterminés lorsque l'on passe à la symétrie sphérique, pour la valeur $r = 2m$.

Enfin, L. Bel [14] , constatant que les modèles d'espace-temps issus des extensions proposées par Finkelstein et Kruskal ne sont pas globalement statiques, en conclut qu'ils sont inadéquats pour représenter le champ extérieur produit par une source en équilibre statique. Cet auteur propose alors, à côté du point de vue de l'extension, une autre approche, que l'on pourrait qualifier de " point de vue de la réduction ", selon laquelle la singularité de Schwarzschild devient un point réel sur lequel se trouvent localisées les sources de la solution statique extérieure. Il est clair que l'acceptation de ce point de vue conduit à écarter toute possibilité de trou noir " au delà " de la

singularité de Schwarzschild et rend vaine toute réflexion sur la physique des objets supposés s'y être effondrés.

C. L'un des traits essentiels, de l'approche de L. Bel, est le rôle privilégié dévolu à la métrique conforme à la métrique quotient, déduite de la métrique de l'espace-temps de Schwarzschild. Cette considération permet de penser que les singularités d'autres métriques statiques ou stationnaires pourront être correctement élucidées selon une procédure semblable à celle mise en oeuvre par cet auteur dans [14]. L'objet principal de ce travail sera d'étudier précisément à la lumière du point de vue de la réduction, les singularités de quelques solutions particulières telles celles de Reissner-Nordström, Newman-Unti-Tamburino, Kerr... et d'identifier, en un sens qui sera précisé, les sources des divers champs correspondants.

Pour être en mesure de procéder à l'étude envisagée il sera nécessaire, dans une première section, de rappeler quelques éléments de la théorie des espaces-temps stationnaires afin d'en fixer le cadre géométrique. On sait que ce type d'espaces-temps est pourvu, par définition, d'un groupe d'isométries à trajectoires orientées dans le temps; ceci fait qu'une variété V_3 s'introduit, tout naturellement, comme espace quotient de V_4 par la relation d'équivalence du groupe. Pour faire de V_3 une variété riemannienne il semblerait naturel de la munir de la métrique quotient $\hat{g}$; cependant nous choisirons $\bar{g}$, métrique différant de la précédente par le coefficient de conformité ξ^2 égal au carré de la norme du vecteur $\vec{\xi}$, générateur du groupe précité. Nous analyserons, de façon détaillée, les raisons qui motivent ce choix et nous verrons que l'on peut légitimement employer les termes d'espace et de métrique d'espace pour qualifier la variété riemannienne (V_3 , $\bar{g}$) et la métrique $\bar{g}$.

L'objet de la deuxième section est de mettre en évidence l'aspect opérationnel des notions introduites ci-dessus. Dans ce but, nous donnerons quelques exemples d'utilisation du formalisme tridimensionnel adapté à (V_3 , $\bar{g}$). Nous verrons, en particulier, qu'il fournit un cadre commode pour la formulation des équations d'Einstein intérieures relatives aux schémas : champ électro-magnétique, champ scalaire, toujours dans le cas stationnaire bien entendu; il en est de même pour la théorie de Dicke. On observera, dans le cas statique, que, grâce à l'emploi de ce formalisme, il est possible de déduire simplement, de toute solution des équations d'Einstein du vide, une solution des équations intérieures

régissant certains schémas particuliers (champ scalaire, théorie de Dicke). Pour faire la transition avec la section suivante, nous mettrons en évidence, dans chacun des cas considérés, la solution à symétrie sphérique et il apparaîtra qu'elles conduisent toutes à une même formulation de la métrique d'espace $\bar{g}$. L'emploi de cette métrique permettra ainsi de faire la distinction entre ce qui est commun aux diverses solutions - l'espace $(V_3, \bar{g})$ - et ce qui les différencie - le ou les champs -.

Dans la troisième section nous traiterons de la question des singularités et des sources des solutions à symétrie sphérique précédemment évoquées. La méthode employée consistera, d'abord, à restreindre chacune d'elles au domaine où elle est globalement statique (ou stationnaire) et différentiable, puis à associer à $(V_3 , \bar{g})$ un espace métrique $(V_3 , \bar{d})$ dont on constatera l'incomplétude. On construira ensuite, au moyen du processus de complétion classique, le complété $(V_3^* , \bar{d}^*)$ de cet espace qui, on le verra, ne contient qu'un seul point additionnel x_0 à V_3. Et c'est précisément en ce point, singulier aussi bien pour la structure riemannienne $\bar{g}$ de V_3 que pour les divers champs, que se trouveront concentrées les sources mises en évidence par l'écriture, en termes de distributions mathématiques, de certaines des équations de champ. En x_0 on localisera ainsi une " densité singulière " de masse, de charge, de " charge scalaire "... spécifique à chacun des champs considérés.

La quatrième et dernière section de ce chapitre sera consacrée à la solution de Kerr. Cette métrique, stationnaire à symétrie axiale, caractérise un espace-temps d'une nature plus complexe que celle de ceux envisagés aux sections deux et trois. De ce fait, il sera nécessaire, pour une approche correcte de la question qui nous occupe, de nous appesantir quelque peu sur certains aspects de la présente solution; en particulier, précisément, sur la structure topologique de l'espace-temps de Kerr et sur la délimitation des domaines où il est stationnaire. Il apparaîtra que les dits domaines revêtent des formes fort différentes selon que le rapport $\frac{m}{a}$, des deux constantes impliqueés dans l'expression de cette métrique, est inférieur à l'unité, ou, au contraire, qu'il l'excède. La suite de l'étude portera sur le seul cas $\frac{m}{a} \geqslant 1$. La métrique sera ensuite restreinte à un domaine connexe où elle est globalement stationnaire et différentiable et la méthode, déjà employée en section trois, sera de nouveau appliquée. Comme précédemment une singularité ponctuelle x_0 sera mise en évidence sur laquelle se trouveront localisées les sources. Deux distributions caractériseront ces dernières : la première est liée à l'aspect massif de la source, elle est du type déjà rencontré dans les autres cas traités; la seconde, spécifique de cette solution, nous paraît

correspondre à un aspect de rotation intrinsèque (spin) de la source.

Tels sont,brièvement rapportés, les principaux thèmes qui vont être envisagés et développés maintenant.

1. ESPACE-TEMPS STATIONNAIRE - ESPACE.

1 1. - Espace-temps stationnaire - Définition - Généralités

Définition. Un espace-temps riemannien V_4 est dit stationnaire s'il existe un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de V_4 et dont les trajectoires, orientées dans le temps, sont homéomorphes à la droite réelle R .

On note V_3 la variété quotient définie par la relation d'équivalence du groupe. Si $\vec{\xi}$ $(\vec{\xi}^2<0)$ désigne le champ de vecteurs, générateur du groupe, et $g_{\alpha\beta}$ les coefficients de la métrique de V_4, alors la définition posée peut être traduite analytiquement comme suit :

$$\mathcal{L}_{(\vec{\xi})}\, g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1.1)$$

où $\mathcal{L}_{(\vec{\xi})}$ est la dérivée de Lie par rapport au champ $\vec{\xi}$.

L'étude systématique des espaces-temps stationnaires a été faite par A. Lichnerowicz [15] ; nous en retenons ici quelques-unes des conclusions.

Il existe dans V_4 des coordonnées locales, dites adaptées au caractère stationnaire, jouissant des propriétés suivantes :

a) Les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraires de V_3. Les variétés x° = Cte sont des variétés globalement définies dans V_4 et homéomorphes à V_3.

b) Les composantes contravariantes de $\vec{\xi}$ s'écrivent :

$$\xi^\circ = 1 \ , \ \xi^i = 0 \iff \xi^\alpha = \delta^\alpha_\circ \ . \qquad (1.2)$$

Ces systèmes de coordonnées adaptées sont définis au changement suivant près :

$$\begin{cases} x^{\circ\prime} = x^\circ + \Psi(x^j) \\ x^{i\prime} = \Psi^{i\prime}(x^j) \ . \end{cases} \qquad (1.3)$$

Si l'on rapporte les potentiels $g_{\alpha\beta}$ à un système de coordonnées adaptées, alors il résulte de (1.1) que :

$$\partial_\circ g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (1.4)$$

et donc les $g_{\alpha\beta}$, exprimés dans ce système, sont indépendants de la variable temporelle x^0 .

Les variétés W_3 , $x^0 = cte$ d'un système de coordonnées locales adaptées, sont dites sections d'espace de ce système.

Soit W_3 une section d'espace déterminée de V_4, cette variété est homéomorphe à V_3 et les (x^i) définissent, pour elle, des coordonnées locales. Les changements de coordonnées qui conservent les sections d'espace sont de la forme :

$$(1.5) \qquad x^{i'} = \varphi^{i'}(x^j) \quad , \qquad x^{0'} = x^0 .$$

On appelle changement du système des sections d'espace tout changement de coordonnées de la forme suivante :

$$(1.6) \qquad x^{i'} = x^i \quad , \qquad x^{0'} = x^0 + \Psi(x^j) .$$

1 2. - Décomposition de la métrique de V_4 suivant $\vec{\xi}$.

1 2 1 Espace

La métrique de V_4 peut être décomposée suivant la direction de temps définie par le champ de vecteurs $\vec{\xi}$, générateur du groupe d'isométries; on a en effet identiquement :

$$(1.7) \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \equiv \frac{1}{\xi^2}\left(\xi_\alpha dx^\alpha\right)^2 + \left(g_{\alpha\beta} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{\xi^2}\right) dx^\alpha dx^\beta .$$

Les composantes covariantes de $\vec{\xi}$, rapportées à un système de coordonnées adaptées, sont facilement déduites de (1.2) :

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \xi_0 = g_{00} \\ \xi_i = g_{0i} \ ; \end{cases}$$

on pose :

$$(1.9) \qquad \Phi_i \equiv -\frac{g_{0i}}{g_{00}}$$

et

(1.9 bis) $\xi^{2} = -\xi^{2} = g_{oo}$.

Par substitution dans (1.7) on obtient l'expression suivante équivalente :

(1.10) $ds^{2} = -\xi^{2}(dx^{o} - \Phi_{i}\,dx^{i})^{2} + (g_{ij} + \xi^{2}\,\Phi_{i}\,\Phi_{j})\,dx^{i}\,dx^{j}$,

soit :

(1.11) $ds^{2} = -(\omega^{o})^{2} + d\hat{s}^{2}$,

en posant :

(1.12) $\omega^{o} \equiv \xi\,(dx^{o} - \Phi_{i}\,dx^{i})$

et

(1.13) $d\hat{s}^{2} \equiv \sum_{i}(\omega^{i})^{2} = (g_{ij} + \xi^{2}\,\Phi_{i}\,\Phi_{j})\,dx^{i}\,dx^{j}$.

Ecrite en coordonnées adaptées, la forme quadratique $d\hat{s}^{2}$ est indépendante de x^{o} et, de plus, on vérifierait facilement, en appliquant la formule (1.6), qu'elle est invariante dans tout changement du système des sections d'espace. En outre, la métrique de V_4 étant partout de type hyperbolique normal, il en résulte que cette forme quadratique $d\hat{s}^{2}$ (1.13) détermine sur V_3 une métrique riemannienne définie positive dont les tenseurs de V_3:

(1.14) $\hat{g}_{ij} \equiv g_{ij} + \xi^{2}\,\Phi_{i}\,\Phi_{j}$

et

(1.15) $\hat{g}^{ij} \equiv g^{ij}$

sont les composantes covariantes et contravariantes.

La variété V_3, douée de la structure de variété riémannienne définie par (1.13), est couramment appelée " espace " et notée (V_3, $\hat{g}$) ou $\hat{V}_3$. Nous avons procédé ainsi dans une étude antérieure [16] cependant dans le présent travail nous ne reprenons pas ce point de vue. Nous pensons après les travaux de V. Fock [17] , J. Ehlers et W. Kundt [18], L. Bel et J.C. Escard [19]

qu'il est sans doute plus judicieux et nommer " espace " la variété V_3 munie de la structure proprement riemannienne définie par la métrique conforme à la métrique $d\hat{s}^2$, précédemment envisagée :

$$(1.16)\qquad ds^2 = \xi^2 d\hat{s}^2 \quad , \quad g_{ij} = \xi^2 \hat{g}_{ij} \quad , \quad g^{ij} = \xi^{-2} \hat{g}^{ij} ;$$

le coefficient de conformité a un sens intrinsèque puisque c'est le carré de la norme du vecteur $\vec{\xi}$, générateur du groupe d'isométrie. Cette variété riemannienne, que nous interprétons comme espace, est notée $(V_3, \bar{g})$ ou simplement $\bar{V}_3$. Nous donnerons dans la suite quelques arguments motivant l'adoption de ce point de vue. Mais pour le moment, et pour avoir les moyens de cette argumentation, il y a lieu de préciser les notions de temps standard et de champ de gravitation, déduits de la décomposition de la métrique $g_{\alpha\beta}$ suivant $\vec{\xi}$ et associés à l'espace V_3. Nous y consacrons le prochain alinéa.

1 2 2 Temps standard - Champ de gravitation.

. Indiquons, pour mémoire, que suivant C. Cattanéo [20] on appelle différentielle de temps standard, l'expression :

$$(1.17)\qquad dT = \omega^0 \quad ,$$

invariante par changement de coordonnées adaptées (1.3). Evidemment, en général dT n'est pas une différentielle exacte et, de ce fait, l'intervalle $T_2 - T_1$, entre deux points x_1 et x_2, devra toujours être défini par intégration de (1.17) le long d'une courbe joignant ces deux points.

. Décomposant la différentielle extérieure de la une-forme ω^0 (1-12) sur la cobase (ω^0, dx^i), on obtient :

$$(1.18)\qquad d\omega^0 = - E_i \, dx^i \wedge \omega^0 - \frac{1}{2} B_{ij} \, dx^i \wedge dx^j$$

avec

$$(1.19)\qquad E_i = - \partial_i U \quad , \quad U = \operatorname{Log} \xi \quad , \quad B_{ij} = \xi (\partial_i \Phi_j - \partial_j \Phi_i) .$$

C'est le couple formé par les champs de vecteurs E_i et de tenseurs antisymétriques B_{ij}, définis aussi bien sur $\hat{V}_3$ que sur $\bar{V}_3$, que nous appelons

" champ de gravitation " .

Observons que Φ_i (1.9) n'est pas un vecteur de $\hat{V}_3$ (ou de $\bar{V}_3$) car il n'est pas invariant par (1.6), cependant il est clair que B_{ij} (1.19) lui l'est, donc c'est bien un tenseur de $\hat{V}_3$ (ou de $\bar{V}_3$).

1 2 3 Espace-temps statique

On dit qu'un espace-temps est statique s'il est stationnaire et si de plus le générateur $\vec{\xi}$ du groupe d'isométries est complètement intégrable. En coordonnées adaptées $B_{ij} = 0$ et on peut trouver dans le voisinage de chaque point de V_3 un système de coordonnées locales tel que $g_{0i} = 0$.

1 3 Equations de champ.

1 3 1 Expressions tridimensionnelles des équations de champ.

Les calculs donnant la transcription tridimensionnelle des équations d'Einstein du vide $R_{\alpha\beta} = 0$, dans le cadre d'un espace-temps stationnaire rapporté à un système de coordonnées locales adaptées, ont été effectués par Y. Thiry [21] et sont exposés complètement dans A. Lichnerowicz [15] . Les équations obtenues se rangent en trois groupes et peuvent être commodément écrites avec nos notations. On a, respectivement :

- sur (V_3 , $\hat{g}$)

$$
\text{(1.20)} \qquad \begin{cases} \text{a} & \hat{\Delta} U = -\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{B}^2 \right) \\ \text{b} & \operatorname{rot} \vec{B} = 2\, \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \text{c} & \hat{S}_{ij} = -\hat{\nabla}_i E_j + E_i E_j + \frac{1}{2} B_i B_j + \frac{1}{4} \hat{g}_{ij} \vec{B}^2 \end{cases}
$$

où

$$
\text{(1.21)} \qquad B^i = \frac{1}{2} \hat{\eta}^{ijk} B_{jk} \quad , \quad \vec{B}^2 = \hat{g}^{ij} B_i B_j \quad , \quad \vec{E}^2 = \hat{g}^{ij} E_i E_j .
$$

($\hat{\eta}_{ijk}$ est le tenseur élément de volume de $\hat{V}_3$)
et $\hat{S}_{ij}$ le tenseur d'Einstein de $\hat{V}_3$.

Toutes les opérations indiquées en (1.20) (1.21) ($\hat{\Delta}$, $\hat{\nabla}$, $\wedge$, ...)

sont définies au sens de la métrique $\hat{g}$.

– sur (V_3, $\bar{g}$)

$$(1.22)\qquad \begin{cases} a & \bar{\Delta} U = -\frac{1}{2}\,\xi^4 \vec{B}^2 \\ b & \mathrm{rot}\,\vec{B} = 3\,\vec{E}\wedge\vec{B} \\ c & \bar{S}_{ij} = 2\,E_i E_j + \frac{1}{2}\,\xi^2 B_i B_j - \bar{g}_{ij}\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{4}\,\xi^2\vec{B}^2\right) \end{cases}$$

où

$$(1.23)\qquad B^i = \frac{1}{2}\,\bar{\eta}^{ijk} B_{jk} \quad , \quad \vec{B}^2 = \bar{g}^{ij} B_i B_j \, , \, \vec{E}^2 = \bar{g}^{ij} E_i E_j .$$

($\bar{\eta}_{ijk}$ est le tenseur élément de $\bar{V}_3$)
et $\bar{S}_{ij}$ désigne le tenseur d'Einstein de $\bar{V}_3$.

Maintenant toutes les opérations indiquées en (1.22) (1.23) (∇, Δ, ...) sont définies au sens de la métrique conforme $\bar{g}$.

Ecrivons, en vue d'une utilisation ultérieure, une seconde formulation équivalente du système (1.22) :

$$(1.24)\qquad \begin{cases} a & \bar{\Delta} U = -\frac{1}{2}\,\xi^2 \vec{B}^2 \\ b & \bar{\nabla}_i(\xi^3 \bar{B}^{ij}) = 0 \qquad\qquad , \text{ où } \bar{B}^{ij} = \bar{g}^{ik}\bar{g}^{jl} B_{kl} \\ c & \bar{R}_{ij} = 2\,E_i E_j + \frac{1}{2}\,\xi^2 B_i B_j \quad ; \end{cases}$$

$\bar{R}_{ij}$ désigne le tenseur de Ricci de l'espace $\bar{V}_3$.

Il apparaît ainsi, en évidence, une première relation de conservation (1.24b); il est bien connu [15] que le vecteur $\vec{h}$, dont l'expression est la suivante :

$$(1.25)\qquad h_i = -E_i + \frac{\xi^3}{2}\,\Phi_k\,\bar{B}^k{}_i \, ,$$

est conservatif; soit la seconde relation :

$$(1.26)\qquad \bar{\nabla}_i h^i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0 .$$

Observons que h_i n'est défini que sur les sections d'espace W_3, car il contient Φ_k dans son écriture; mais sa divergence est définie intrinsèquement sur $\bar{V}_3$. On le verrait facilement en effectuant un changement du système

des sections d'espace, selon la formule (1.6), et en constatant que l'expression de la div. de $\mathfrak{h}$ ne dépend pas de la section sur laquelle elle est calculée. Ces deux relations de conservation interviendront dans la suite de l'étude pour la caractérisation des sources du champ.

1 3 2 Justifications du choix de la métrique $\bar{g}$.

Nous allons exposer maintenant quelques arguments propres, croyons-nous, à justifier le choix de la métrique conforme $\bar{g}$ comme métrique d'espace.

a) Supposons l'espace-temps V_4 rapporté à un système de coordonnées (x^α) adaptées à son caractère stationnaire et de plus harmoniques; alors les coefficients $g^{\alpha\beta}$ vérifient :

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad , \qquad \left(g = \det g_{\alpha\beta}\right). \tag{1.27}$$

Ces quatre relations se décomposent en deux groupes. Le premier groupe, pour $\beta = 0$, se réduit à la seule équation suivante :

$$\partial_i\left(\sqrt{\bar{g}}\;\bar{\Phi}^i\right) = 0 \tag{1.28}$$

avec

$$\bar{\Phi}^i = \bar{g}^{ij}\,\Phi_j \qquad , \qquad \left(\bar{g} = \det \bar{g}_{ij}\right).$$

On peut interpréter (1.28), comme une condition du type Lorentz en électromagnétisme. Le second groupe, pour $\beta = i$, s'écrit :

$$\partial_j\left(\sqrt{\bar{g}}\;\bar{g}^{ij}\right) = 0 \tag{1.29}$$

et il exprime que les trois coordonnées adaptées (x^i) sont des coordonnées harmoniques de $\bar{V}_3$. Cette situation particulière est liée à l'emploi de la métrique conforme $\bar{g}$; c'est une propriété intéressante de cette métrique.

b) Comparons les formulations des équations de champ (1.20) et (1.22) afférentes respectivement à $\hat{V}_3$ et $\bar{V}_3$. Elles diffèrent essentiellement au niveau des équations (c); en effet, alors que l'expression de $\hat{S}_{ij}$ comporte un terme dérivé $(\hat{\nabla}_i E_j)$, celle de $\bar{S}_{ij}$ est, au contraire, une fonction purement

algébrique des composantes de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$. Cette remarque de structure est un argument de simplicité favorable à $\bar{V}_3$. De plus, ainsi que nous le verrons concrètement dans la suite, l'emploi du système (1.22), relatif à $\bar{V}_3$, permet de déduire commodément certaines solutions nouvelles des équations de champ, de certaines autres déjà connues.

c) De la différence de structure des tenseurs $\bar{S}_{ij}$ et S_{ij} , relevée ci-dessus, découle l'argument que nous allons expliciter maintenant. Notation : si une fonction $F(x;\alpha)$ est développable en serie de puissances de α , nous poserons :

(1.30) $$F(x;\alpha) = \overset{0}{F} + \alpha \overset{1}{F} + \alpha^2 \overset{2}{F} + \cdots\cdots$$

Considérons une solution stationnaire du vide dépendant d'un paramètre α , développable en série de puissances de α et telle que :

(1.31) $$g_{\alpha\beta}(x^\lambda;\alpha) = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{avec} \qquad \eta_{\alpha\beta} : (-1,+1,+1,+1).$$

La métrique $g_{\alpha\beta}$ est donc de la forme :

(1.32) $$g_{\alpha\beta}(x^\lambda;\alpha) = \eta_{\alpha\beta} + \alpha \overset{1}{g}_{\alpha\beta} + \cdots$$

et par suite la métrique $\bar{g}_{ij}$:

(1.33) $$\bar{g}_{ij} = \eta_{ij} + \alpha \overset{1}{\bar{g}}_{ij} + \cdots\cdots.$$

En vertu des définitions posées (1.19), il est clair qu'en général, nous aurons pour termes principaux de ξ , $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

(1.34) $$\overset{0}{\xi} = 1 \quad , \qquad \overset{1}{E}_i \neq 0 \quad , \qquad \overset{1}{B}_{ij} \neq 0 .$$

Compte tenu du premier terme $(\hat{\nabla}_i E_j)$ figurant dans le second membre de (1.20c) nous aurons ensuite pour le tenseur d'Einstein $\hat{S}_{ij}$ et le tenseur de courbure $\hat{R}_{ijkl}$ de $\hat{V}_3$:

(1.35) $$\overset{1}{\hat{S}}_{ij} \neq 0 \quad , \qquad \overset{1}{\hat{R}}_{ijkl} \neq 0 .$$

Il résulte enfin de (1.34) et (1.22c) que le tenseur d'Einstein $\bar{S}_{ij}$ de $\bar{V}_3$ est tel que :

(1.36) $$\overset{1}{\bar{S}}_{ij} \neq 0$$

et cela entraîne, parce que $\bar{V}_3$ a trois dimensions, que le tenseur de courbure $\bar{R}_{ijkl}$ est aussi tel que :

$$\bar{R}_{ijkl} = 0 \,. \qquad (1.37)$$

Les termes principaux des tenseurs δ_{ij} et $\bar{R}_{ijkl}$ sont donc, au minimum d'ordre deux. Cet aspect caractéristique de la métrique $\bar{g}$ de l'espace $\bar{V}_3$ peut être traduit en disant que, par rapport au développement en puissances du paramètre α, elle est osculatrice en chaque point à la métrique euclidienne.

Cette propriété de la métrique conforme $\bar{g}$ permet de distinguer nettement la notion de champ de gravitation qui, au premier ordre, est le couple $(\vec{E}, \vec{B})$, de celle d'espace $\bar{V}_3$ qui, au premier ordre, reste euclidien; la terminologie introduite aux alinéas 1 2 1 et 1 2 2 trouve ainsi sa justification.

On peut dire, en bref, que la théorie du champ de gravitation de Newton est l'ensemble de l'espace euclidien et d'un fonction harmonique sur cet espace. Il apparaît donc, compte tenu de cette formulation et de (1.22a), que c'est seulement en interprétant la métrique conforme $\bar{g}$ comme métrique d'espace que l'on peut dire que la théorie d'Einstein contient comme cas limite la théorie de Newton.

Remarque.

Si l'on développe l'expression du tenseur de courbure $\bar{R}_{ijkl}$, on voit que $\bar{R}_{ijkl}$ revêt la forme suivante :

$$\bar{R}_{ijkl} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{ik}\bar{g}_{jl} + \partial_{jl}\bar{g}_{ik} - \partial_{il}\bar{g}_{jk} - \partial_{jk}\bar{g}_{il}\right) \qquad (1.38)$$

et la nullité de cette quantité entraîne que $\bar{g}_{ij}$ est de la forme :

$$\bar{g}_{ij} = \partial_i a_j + \partial_j a_i \,, \qquad (1.39)$$

Il est donc toujours possible, par un changement de coordonnées approché :

$$x^{k'} = x^k + \alpha a^k \qquad (a^k = \eta^{kl} a_l) \qquad (1.40)$$

de faire en sorte que :

$$\bar{g}_{i'j'} = 0 \,. \qquad (1.41)$$

Dans le cas particulier de la métrique de Schwarzschild, V. Fock [17] a mis en évidence une formulation du type mentionné ici ($\bar{g}_{ij} = 0$) grâce à l'emploi

d'un système de coordonnées harmoniques; en général, cependant, l'usage d'un système de coordonnées harmoniques ne conduit pas forcément à une écriture des $\bar{g}_{ij}$ débarassée des termes du premier ordre en α .

Ayant introduit, de façon motivée, les concepts d'espace (V_3, $\bar{g}$) et de champ de gravitation ($\vec{E}$, $\vec{B}$) nous allons, dans les prochaines sections, les employer pour l'étude des singularités et des sources de quelques solutions statiques et stationnaires.

II. QUELQUES APPLICATIONS DES NOTIONS D'ESPACE (V_3 , $\bar{g}$) ET DE CHAMP DE GRAVITATION ($\vec{E}$, $\vec{B}$).

2 1. - Introduction

Dans cette section nous allons mettre en oeuvre les notions de champ de gravitation et d'espace que nous venons d'exposer. Cette partie de notre étude permettra de constater que ces notions ne sont pas seulement valables comme concepts, source d'une meilleure compréhension de la théorie d'Einstein, mais aussi parce qu'elles donnent lieu à un formalisme spécifique commode et efficace pour l'appréhension et le traitement de problèmes concrets.

Nous allons envisager précisément, à l'aide du formalisme tridimensionnel adapté à V_3, l'approche de quelques questions concrètes. En particulier nous déterminerons, ou rappellerons, certaines solutions statiques à symétrie sphérique correspondant à la théorie de Dicke et à certains schémas intérieurs (champ scalaire, champ électro-magnétique). Pour avoir des expressions comparables nous emploierons des systèmes de coordonnées t , r, θ , φ " polaires harmoniques " c'est à dire tels que les fonctions : t ,

$$(2.1) \quad x^1 = r \sin\theta \cos\varphi \quad , \quad x^2 = r \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad x^3 = r\cos\theta$$

soient, dans chaque cas, des fonctions harmoniques. Rapportée à un tel système, la métrique de Schwarzschild s'écrit :

$$(2.2) \quad ds^2 = -\frac{r-a}{r+a} c^2 dt^2 + \frac{r+a}{r-a} dr^2 + (r+a)^2 d\omega^2$$

avec

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 ,$$

$$a = \frac{Gm}{c^2} \quad , \qquad (G \text{ et } c = 1) .$$

La métrique d'espace $\bar{V}_3$ a pour expression :

$$(2.3) \quad d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - a^2) d\omega^2 .$$

Le système de coordonnées (t , x^i) n'est admissible que pour $r > a$.

2 2. - Théorie de Dicke

La théorie de Dicke [22] propose une description des phénomènes gravitationnels, dans le cadre géométrique d'une variété riemannienne quadridimensionnelle V_4, au moyen : d'une part, du champ métrique $g_{\alpha\beta}$ et, d'autre part, d'un champ scalaire Φ .

Les équations de champ s'écrivent comme suit, pour le cas intérieur :

$$(2.4)\quad S_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{\Phi c^4} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\Phi^2}\left(\partial_\alpha\Phi\,\partial_\beta\Phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\mu}\partial_\gamma\Phi\,\partial_\mu\Phi\right) + \frac{1}{\Phi}\left(\nabla_{\alpha\beta}\Phi - g_{\alpha\beta}\Box\Phi\right),$$

$$(2.5)\quad \Box\Phi \equiv g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}\Phi = \frac{8\pi}{(3+2\omega)c^4} T \qquad \text{où} \qquad T \equiv g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

et pour le cas extérieur, défini par $T_{\alpha\beta} \equiv 0$, sous l'hypothèse $\omega \neq -\frac{3}{2}$:

$$(2.6)\quad R_{\alpha\beta} = \frac{\omega}{\Phi^2}\partial_\alpha\Phi\,\partial_\beta\Phi + \frac{\nabla_{\alpha\beta}\Phi}{\Phi}$$

$$(2.7)\quad \Box\Phi = 0 \ .$$

Dans ces équations figurent c , la vitesse de la lumière dans le vide, et ω , une constante sans dimension. A la limite $\omega \longrightarrow \infty$, $\Phi \longrightarrow G^{-1}$ la théorie de Dicke se réduit à la relativité générale.

Notre propos ici n'est pas de discuter du bien fondé de cette théorie mais simplement de voir que l'utilisation des notions introduites précédemment aux alinéas 1 2 1, 1 2 2 - champ de gravitation, espace - se révèle intéressante également dans le présent contexte et efficace pour l'obtention de certaines solutions particulières.

2 2 1 Cas stationnaire - cas statique à symétrie sphérique.

a) On se limite à envisager le cas stationnaire extérieur. Compte tenu des développements figurant aux paragraphes 1 1 et 1 2 , le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ de V_4 vérifie :

$$(2.8)\quad \mathcal{L}_{(\vec{\xi})}\, g_{\alpha\beta} = 0 \ ;$$

de plus, on requiert que Φ vérifie également :

(2.8 bis) $\mathcal{L}_{(\xi)}\,\Phi = 0$.

En coordonnées adaptées ces relations se traduisent par :

(2.9) $\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0$, $\partial_0 \Phi = 0$.

Au lieu d'appeler espace la variété quotient V_3 munie de la métrique $d\tilde{s}^2$ dont les coefficients sont $\tilde{g}_{ij} = \xi^2 \hat{g}_{ij}$, il est en fait plus judicieux d'adopter ici ce terme pour qualifier V_3 munie de la métrique $d\tilde{\sigma}^2$ définie comme suit :

(2.10) $d\tilde{\sigma}^2 = (\Phi\xi)^2\, d\hat{s}^2$, $\tilde{g}_{ij} = (\xi\Phi)^2 \hat{g}_{ij}$

avec $d\hat{s}^2$ donnée en (1.13). La définition du champ de gravitation $(\vec{E}, \vec{B})$, proposée en (1.19), doit être un peu modifiée pour tenir compte des traits spécifiques à la présente théorie; on écrit maintenant :

(2.11) $\tilde{E}_i = -\partial_i U$, $U = \operatorname{Log}\xi$, $\tilde{B}_{ij} = \xi\Phi(\partial_i \Phi_j - \partial_j \Phi_i)$

et

(2.12) $\Psi = \operatorname{Log}\Phi$.

Et l'on appelle champ de gravitation le triplet $(\Psi, \tilde{E}_i, \tilde{B}_{ij})$. Ces champs scalaire, vectoriel et tensoriel sont bien définis sur $\tilde{V}_3$.

Les équations de champ (2.4) et (2.5), relatives au cas stationnaire s'écrivent sous forme tridimensionnelle adaptée à $\tilde{V}_3$ de la façon suivante :

(2.13)
$$\begin{cases} \text{a} & \tilde{\Delta} U = -\frac{1}{2}\,\xi^2 \vec{B}^2 \\ \text{b} & \tilde{\nabla}_j(\xi^3 \tilde{B}^{ij}) = 0 \\ \text{c} & \tilde{R}_{ij} = 2\,\tilde{E}_i \tilde{E}_j + \frac{\xi^2}{2}\,\tilde{B}_i \tilde{B}_j + (\omega+2)\,\partial_i\Psi\partial_j\Psi + \partial_i U \partial_j \Psi + \partial_j U \partial_i \end{cases}$$

(2.14) $\tilde{\Delta}\Psi = 0$.

Toutes les opérations indiquées sont définies au sens de la métrique $\tilde{g}$. Comparant avec le système (1.24), relatif au cas extérieur (en R.G.), on voit que la différence se situe au niveau des équations (c) et se traduit par la présence de termes complémentaires en (2.13c).

Ajoutons encore que le vecteur $\vec{h}_i$, dont l'expression est :

(2.15) $\vec{h}_i = -\tilde{E}_i + \frac{\xi^3}{2}\,\Phi^2 \Phi_k \tilde{B}^k{}_i$

satisfait à l'équation de conservation suivante :

(2.16) $$\tilde{\nabla}_i \tilde{k}^i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\tilde{\omega}.\tilde{k} = 0 \ .$$

tout à fait semblable à (1.26); de même que cette dernière sur $\bar{V}_3$, cette relation a une signification intrinsèque sur $\tilde{V}_3$.

Les considérations, développées en a. b. c. à l'alinéa 1 3 2 pour justifier du choix de $\bar{g}$ (1.16) comme métrique d'espace V_3 dans le cas de la théorie d'Einstein, pourraient être reprises ici à propos de $\tilde{g}$ (2.10), moyennant quelques adaptations au présent contexte. On note ainsi que la propriété d'harmonicité d'un système de coordonnées ne se transmettra de (V_4, g) à (V_3, $\tilde{g}$) que si l'on modifie la définition initiale en substituant à (1.27) la relation suivante :

(2.17) $$\partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\ \Phi\ g^{\alpha\beta} \right) = 0 \ ,$$

pour caractériser une métrique rapportée à un système de coordonnées harmoniques dans le cadre de la théorie de Dicke.

b) On considère maintenant le cas statique extérieur. En coordonnées adaptées, on a alors :

(2.18) $$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \qquad , \ \partial_0 \Phi = 0 \qquad \text{et} \qquad g_{0i} = 0$$

et le système des équations de champ (2.13) et (2.14) se réduit à :

(2.19) $$\begin{cases} a) & \tilde{\Delta}\tilde{U} = 0 \\ b) & \tilde{R}_{ij} = 2\,\partial_i \tilde{U}\,\partial_j \tilde{U} + (\omega + 2)\,\partial_i \Psi \partial_j \Psi + \partial_i \tilde{U}\,\partial_j \Psi + \partial_j \tilde{U}\,\partial_i \Psi \ , \end{cases}$$

(2.20) $$\tilde{\Delta}\Psi = 0 \ .$$

Nous nous proposons de mettre en évidence un certain type de solutions particulières de ce système. Pour ce faire, compte tenu de (2.19a), on substitue à (2.20) l'équation suivante :

(2.21) $$\Psi = a\,\tilde{U} + b \ ,$$

évidemment beaucoup plus contraignante que ne l'est (2.20);a et b sont des constantes pour le moment tout à fait arbitraires. Le système (2.19) (2.20) prend alors la forme suivante :

$$(2.22)\qquad \begin{cases} a) & \tilde{\Delta}\tilde{U} = 0 \\ b) & \tilde{R}_{ij} = 2\,\chi^2\,\partial_i\tilde{U}\,\partial_j\tilde{U}\,. \end{cases}$$

On a posé :

$$(2.23)\qquad \chi^2 = 1 + \alpha + \left(\tfrac{\omega}{2}+1\right)\alpha^2$$

et l'on prend $\omega > -\frac{3}{2}$ ainsi $\chi^2 > 0$ pour tout α.

Ecrivons, aux fins de comparaison, le système des équations d'Einstein du vide pour le cas statique, dans le cadre tridimensionnel de $\bar{V}_3$; il vient de (1.22) :

$$(2.24)\qquad \begin{cases} a) & \bar{\Delta}U = 0 \\ b) & \bar{R}_{ij} = 2\,\partial_i U\,\partial_j U\,. \end{cases}$$

Il apparaît à l'évidence que les systèmes (2.22) (2.24) sont formellement identiques. Il en résulte que toute solution $(\bar{g}_{ij}, U)$, de (2.24), donne une solution $(\tilde{g}_{ij}, \tilde{U})$, de (2.22) telle que :

$$(2.25)\qquad \tilde{g}_{ij} = \bar{g}_{ij}\,, \qquad \tilde{U} = \chi^{-1}U + d$$

où d est une constante arbitraire. Ensuite pour obtenir Ψ il suffit de substituer à $\tilde{U}$ son expression (2.25) dans (2.21).

Ainsi, dans le cas statique, on peut déduire des solutions des équations d'Einstein du vide une classe particulière de solutions de la théorie de Dicke.

c) On envisage maintenant le cas particulier de la solution statique à symétrie sphérique. Les potentiels $\tilde{U}$ et Ψ ne sont alors fonctions que de la coordonnée radiale r et, comme de plus nous requérons que l'espace-temps soit à comportement asymptotiquement minkowskien et aussi que Ψ tende vers zéro lorsque r croit vers l'infini, ils satisfont à la relation (2.21) avec $b = 0$.

Nous appliquons ensuite la procédure décrite dans le sous-alinéa précédent et la solution $(U, \bar{g}_{ij})$ de (2.24) qu'il convient, tout naturellement, de considérer est la métrique de Schwarzschild, soit d'après (2.2) et (2.3) :

$$(2.26)\qquad U = \frac{1}{2}\log\frac{r-\alpha}{r+\alpha}$$

et

$$d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2-\alpha^2)\,d\omega^2\,.$$

On en déduit immédiatement $\tilde{U}$ et Ψ :

(2.27) $$\tilde{U} = \frac{1}{2\lambda} \text{Log} \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \qquad (d = 0 \text{ car } \tilde{U} \longrightarrow 0 \text{ pour } r \longrightarrow \infty)$$

et

(2.28) $$\tilde{\Psi} = \frac{\alpha}{2\lambda} \text{Log} \frac{r-\alpha}{r+\alpha}$$

d'où il suit :

(2.29) $$\xi^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)^{1/\lambda} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)^{\alpha/2\lambda}$$

et la métrique ds^2 de V_4 s'écrit :

(2.30) $$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + (\xi\Phi)^{-2} d\tilde{s}^2 \qquad \text{où} \quad d\tilde{s}^2 \equiv d\bar{s}^2.$$

Cette solution statique à symétrie sphérique n'est pas la seule de ce type que fournisse la théorie de Bicke; il en existe trois autres associées à des métriques d'espace toutes différentes de (2.26) [23]. Il importe de noter que ces autres solutions sont, à des titres divers, physiquement insatisfaisantes aussi bien la solution présentée ici est finalement la seule acceptable.

2 3. - Champ scalaire

2 3 1 Equations de champ.

On examine maintenant le cas intérieur descriptif du schéma champ scalaire pur. Les équations de champ s'écrivent comme suit :

(2.31) $$S_{\alpha\beta} = \kappa \left[\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left(g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi + \mu^2 \Phi^2 \right) \right]$$

(2.32) $$\Box\Phi - \mu^2\Phi = 0$$

où Φ est le champ scalaire de portée μ^{-1} , κ la constante de couplage. Dans le cas stationnaire, où :

(2.33) $$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_0 \Phi = 0 \ ,$$

le système précédent (2.31) et (2.32), peut être écrit sous la forme tridimensionnelle suivante adaptée à $\bar{V}_3$:

(2.34)
$$\begin{cases} \text{a} & \bar{\Delta} U = -\frac{\xi^2}{2} \vec{B}^2 - \frac{\kappa}{2} \mu^2 \Phi^2 \xi^{-2} \\ \text{b} & \bar{\nabla}_i (\xi^3 \bar{B}^{ij}) = 0 \\ \text{c} & \bar{R}_{ij} = 2 E_i E_j + \frac{1}{2} \xi^2 B_i B_j + \kappa \left(\partial_i \Phi \partial_j \Phi + \frac{1}{2} \bar{g}_{ij} \xi^{-2} \mu^2 \Phi^2 \right) \end{cases}$$

(2.35) $\bar{\Delta}\Phi - \mu^2 \Phi \xi^{-2} = 0$

où E_i , B_{ij} sont les quantités définies en (1.19).

Bien que ces équations (a. c.) diffèrent assez notablement de (1.22) et de (2.13) (2.14), en raison de la présence du potentiel Φ lorsque $\mu \neq 0$, les arguments justificatifs du choix de la métrique $\bar{g}$ conservent toute leur valeur. En relation avec une autre partie de cette thèse - chapitre premier, paragraphe 2 2 -nous insisterons particulièrement sur le fait que la métrique d'espace $\bar{g}$ est osculatrice en chaque point à la métrique euclidienne, par rapport au développement en puissances d'un paramètre α , de $g_{\lambda\mu}$ et Φ , tel que :

(2.36)
$$\begin{cases} g_{\lambda\mu}(x,\alpha) = \eta_{\lambda\mu} + \alpha\, g^{1}_{\lambda\mu} + \cdots \\ \Phi\ (x,\alpha) = \alpha\, \Phi^{1} + \alpha^2\, \Phi^{2} + \cdots \end{cases}$$

suivant la notation (1.29). Nous avons vu,dans la remarque notée en 1 3 2 c , qu'il est possible de déterminer un système de coordonnées (x^λ) faisant apparaître explicitement au niveau même de la métrique $\bar{g}$ ce contact d'ordre supérieur, c'est-à-dire tel que :

(2.37) $$\bar{g}_{ij} = \eta_{ij} + \alpha^2\, \bar{g}^{2}_{ij} + \cdots .$$

Cette possibilité est exploitée précisément au paragraphe 2 2 déjà cité.

2 3 2 Solution statique à symétrie sphérique avec champ scalaire .

Le formalisme proposé en (2.34) (2.35) peut être utilisé pratiquement pour la détermination de certaines solutions particulières lorsque $\mu = 0$. Dans le cas statique les équations du champ se réduisent alors à :

(2.38)
$$\begin{cases} \text{a} & \bar{\Delta} U = 0 \\ \text{b} & \bar{R}_{ij} = 2\, \partial_i U\, \partial_j U + \chi\, \partial_i \Phi\, \partial_j \Phi \end{cases}$$

(2.39) $$\bar{\Delta}\Phi = 0$$

et il est clair que le raisonnement mené précédemment en 2 2 1, à propos de la théorie de Dicke, vaut encore; de même pour sa conclusion.

La solution statique à symétrie sphérique entre naturellement dans ce processus et s'écrit comme suit :

(2.40) $$ds^2 = -\xi^2 dt^2 + \xi^{-2} d\bar{s}^2 \quad ;$$

l'on a toujours la même formulation de la métrique d'espace :

(2.41) $$d\bar{s}^2 = -d\pi^2 + (\pi^2 - \alpha^2) d\omega^2 \quad .$$

Le champ de gravitation $\vec{E}$ dérive du potentiel U suivant :

(2.42) $$U = \frac{1}{2\sigma} \operatorname{Log} \frac{\pi - \alpha}{\pi + \alpha} \quad , \quad (U \equiv \operatorname{Log} \xi) .$$

le champ scalaire Φ vaut :

2.43) $$\Phi = \alpha U \quad .$$

La constante α est arbitraire et s'écrit :

(2.44) $$\sigma^2 \equiv 1 + \chi \alpha^2 \quad .$$

Au vu des exemples déjà donnés (et de ceux que nous donnerons dans la suite) il pourrait être tentant de supposer que la métrique d'espace, citée une fois encore en (2.41), convient pour toutes les solutions statiques à symétrie sphérique; en fait, cette hypothèse serait inexacte l'exemple du champ scalaire avec masse $\mu \neq 0$ le montre. Sans nous appesantir sur l'étude de ce cas, indiquons cependant que les équations qui le régissent, (2.34) (2.35) avec $\vec{B} \equiv 0$, peuvent être commodément écrites à l'aide de la métrique d'espace suivante :

(2.45) $$d\bar{s}^2 = e^{2B} d\pi^2 + e^{2C} \pi^2 d\omega^2$$

Et quelques calculs élémentaires, portant sur le système d'équations précitées, montrent qu'il est exclu que la métrique (2.45) revête la forme (2.41).

2 4. - Champ électro-magnétique

2 4 1 Equations de champ.

Voyons enfin un dernier cas intérieur : le schéma champ électro-magnétique pur. Les équations d'Einstein-Maxwell, qui le régissent, sont :

(2.46) $$S_{\alpha\beta} = \lambda \left(-F_{\gamma\alpha} F^{\gamma}{}_{\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} \right) \quad , \quad \left(\lambda \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \right)$$

(2.47) $$\nabla_{\alpha} F^{\alpha\beta} = 0$$

(2.48) $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$.

De cette dernière équation on déduit que, sur tout domaine ouvert de l'espace-temps V_4 homéomorphe à R^4 où $F_{\alpha\beta}$ est continument différentiable, il existe un champ de vecteurs A_α continu, que l'on appelle le potentiel vecteur électromagnétique, tel que :

(2.49) $$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha .$$

A_α n'est défini qu'à l'addition du gradient d'une fonction arbitraire près.

Considérons le cas où l'espace-temps V_4 est stationnaire; dans le système de coordonnées adapté nous avons :

(2.50) $$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_0 A_\alpha = 0 .$$

Transcrivons dans le cadre tridimensionnel de $\bar{V}_3$ les équations de Maxwell (2.47) et (2.48). Compte tenu de (2.50), on a la suite d'expressions :

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} \equiv \nabla_i F^{i\beta} \equiv \frac{\xi^2}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\xi^{-1} \sqrt{\bar{g}} F^{i\beta} \right) = 0 \quad \text{car} \quad \sqrt{-g} = \xi^{-2} \sqrt{\bar{g}} ,$$

d'où il résulte . pour $\beta = 0$:

(2.51) $$\left| \; \operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = 0 \right.$$

avec :

(2.52) $$\mathcal{D}^i = \xi^{-1} F^{i0}$$

. pour $\beta = j$:

(2.53) $$\left| \; \operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} = 0 \right.$$

avec

(2.54) $$\mathcal{H}_i = \frac{1}{2} \bar{\eta}_{ijk} \, \xi^{-2} F^{jk} .$$

On poursuit avec l'équation (2.48). On a d'abord . pour $\alpha = 0$

$$\partial_i F_{j0} + \partial_j F_{0i} = 0$$

soit :

(2.55) $$\left| \; \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} = 0 \right.$$

avec

(2.56) $$\mathcal{E}_i = F_{0i} .$$

. pour $\alpha, \beta, \gamma = i, j, k$ on a :

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0$$

soit

$$\text{(2.57)} \quad \left| \operatorname{div} \vec{\mathcal{B}} = 0 \right.$$

avec

$$\text{(2.58)} \qquad \mathcal{B}^i = \frac{1}{2} \bar{\eta}^{ijk} F_{jk} .$$

Il est manifeste que les grandeurs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{D}}$ ne sont définies que sur W_3, cependant toutes les équations de champ (2.51) (2.53) et (2.57) sont invariantes par un changement arbitraire du système des sections d'espace W_3 ; elles sont donc intrinsèquement définies sur $\bar{V}_3$.

En explicitant les composantes $F_{\alpha\beta}$ en fonction des $F^{\alpha\beta}$ on obtient les relations suivantes :

$$\text{(2.59)} \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{D}} = \xi^{-1} \vec{\mathcal{E}} + \vec{\Phi} \wedge \vec{\mathcal{H}} \\ \vec{\mathcal{B}} = \xi^{-1} \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\Phi} \end{cases}$$

où $\vec{\Phi}$: $\Phi_i \equiv \dfrac{\partial \sigma^4}{\partial x^i}$.

Dans ces dernières formules, comme dans tout ce paragraphe, toutes les opérations, tous les symboles, doivent être compris au sens de la métrique $\bar{g}$

Les équations de champ notées présentent une analogie formelle avec celles de la magnétostatique et de l'électrostatique dans les milieux matériels continus. Dans le cas statique il ne subsiste plus que les champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{D}}$ et la quantité $1/\xi^2$ joue le rôle d'une perméabilité diélectrique.

Nous pourrions déduire de (2.46), sans difficulté, la transcription sur $\bar{V}_3$ des équations de champ restant, comme il n'en résulterait aucune observation significative il n'est pas utile de donner la formulation correspondante.

2 4 2 Solution statique à symétrie sphérique des équations d'Einstein Maxwell.

La solution statique à symétrie sphérique des équations d'Einstein-Maxwell est bien connue : c'est la métrique de Reissner-Nordström [24] qui s'écrit comme suit :

$$ds^2 = -\xi^2 c^2 dt^2 + \xi^{-2} dr^2 + r^2 d\omega^2$$

(2.60) où

$$\xi^2 = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r} + \frac{4\pi G q^2}{c^4 r^2} .$$

Le potentiel électrostatique est :

(2.61) $$A_0 = \frac{q}{r} \quad , \quad (A_i \equiv 0)$$

et le champ :

(2.62) $$\mathcal{E}_{01} = \frac{q}{r^2} .$$

Pour assurer la cohérence interne de cette section il convient de poser $G = 1$, $c = 1$ et d'employer un système de coordonnées polaires harmoniques que l'on obtient en posant :

(2.63) $$r = \bar{r} + m .$$

Dans ces conditions on a pour expression de la métrique d'espace $\bar{V}_3$:

(2.64) $$d\bar{s}^2 = d\bar{r}^2 + (\bar{r}^2 - a^2) d\omega^2$$

où

(2.65) $$a^2 = m^2 - 4\pi q^2 \qquad (\Longrightarrow \quad m \geq 2\sqrt{\pi}|q|) .$$

Il vient ensuite :

(2.66) $$\xi^2 = \frac{\bar{r}^2 - a^2}{(\bar{r}+m)^2}$$

et

(2.67) $$A_0 = \frac{q}{\bar{r}+m} \quad , \quad \mathcal{E}_{01} = \frac{q}{(\bar{r}+m)^2} \quad , \quad \mathcal{D}^1 = \frac{q}{\bar{r}^2 - a^2} .$$

On constate, une fois encore, que l'on retrouve la même formulation de la métrique d'espace.

Après ces considérations sur quelques schémas matériels classiques on revient dans le paragraphe suivant aux espaces-temps stationnaires extérieurs pour étudier plus précisément leur structure et mettre en évidence dans cet ensemble, grâce aux notions dégagées en 1 4, une classe particulière de métriques pourvues d'une propriété spécifique.

2 5. - Une classe particulière d'espaces-temps stationnaires - Un exemple :

la solution de N.U.T.

2 5 1 Cas général

Dans ce paragraphe nous allons considérer une certaine classe d'espaces-temps stationnaires et voir que l'utilisation du formalisme tridimensionnel adapté à l'espace $\bar{V}_3$ permet de caractériser précisément les solutions correspondantes des équations de champ.

Soient (V_4, g) un espace-temps stationnaire et (V_4, g^*) un espace-temps statique admettant tous les deux la même métrique d'espace, soient g_{ij} les coefficients de cette métrique; on se propose de mettre en évidence les relations entre les champs de gravitation (U , $\vec{B}$) et (V, $\vec{B} = 0$), afférents respectivement à (V_4 , g) et (V_4 , g^*), que créent nécessairement cette hypothèse particulière, compte tenu des équations de champ (1.24).

Pour la clarté de la suite de l'exposé, rappelons l'écriture de ces équations dans le cadre de $\bar{V}_3$. Pour le cas stationnaire, on a :

$$
\text{(2.68)} \qquad
\begin{cases}
\text{a} & \bar{\Delta} U = -\dfrac{\xi^2}{2}\,\vec{B}^2 \\
\text{b} & \bar{\nabla}_i(\xi^3 B^{ij}) = 0 \iff \operatorname{rot}\vec{B} = 3\,\vec{E}\wedge\vec{B} \\
\text{c} & \bar{R}_{ij} = 2\,E_i E_j + \dfrac{\xi^2}{2} B_i B_j
\end{cases}
$$

avec :

$$
\text{(2.69)} \qquad E_i = -\partial_i U \quad , \quad B_{ij} = \xi\left(\partial_i \Phi_j - \partial_j \Phi_i\right) \quad , B^i = \frac{1}{2}\bar{\eta}^{ijk} B_{jk},
$$

ajoutons que $\vec{B}$, de par sa définition même, satisfait à l'équation de structure :

$$
\text{(2.70)} \qquad \bar{\nabla}_i B^i = 0 \iff \operatorname{div}\vec{B} = 0 \ .
$$

Pour le cas statique :

$$
\text{(2.71)} \qquad
\begin{cases}
\text{a} & \bar{\Delta} U = 0 \\
\text{b} & \bar{R}_{ij} = 2\,E_i^* E_j^*
\end{cases}
$$

avec

(2.72) $$E^* = -\partial_i V \ .$$

Les équations (2.68c) et (2.71b) ont même membre de gauche, d'où il résulte que :

(2.73) $$E^*_i E^*_j = E_i E_j + \frac{\xi^2}{4} B_i B_j \ .$$

De cette relation on déduit les deux suivantes : la première, en élevant chacun de ses membres au carré, soit :

$$(E^*_i E^*_j)^2 = (E_i E_j)^2 + \left(\frac{\xi^2}{4} B_i B_j\right)^2 + \frac{\xi^2}{2} E_i E_j B_i B_j \quad ;$$

la seconde, en faisant d'abord $i = j$ (dans (2.73)), puis le produit ci-après:

$$(E^*_i)^2 (E^*_j)^2 = \left[(E_i)^2 + \left(\frac{\xi}{2} B_i\right)^2\right]\left[(E_j)^2 + \left(\frac{\xi}{2} B_j\right)^2\right] .$$

soit encore :

$$(E^*_i E^*_j)^2 = (E_i E_j)^2 + \left(\frac{\xi^2}{4} B_i B_j\right)^2 + \frac{\xi^2}{2}\left[(E_i B_j)^2 + (E_j B_i)^2\right] .$$

Comparant ces deux relations on voit immédiatement que :

(2.74) $$E_i B_j = E_j B_i \longrightarrow B_i \vec{E}^2 = (E^j B_j) E_i \ .$$

$\vec{B}$ et $\vec{E}$ sont donc colinéaires et l'on pose :

(2.75) $$f(x) \equiv \frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{\vec{E}^2} \ (\neq 0) \quad , \qquad \vec{B} = f(x)\, \vec{E} \ .$$

De l'équation de champ (2.68b) résulte alors la relation suivante :

(2.76) $$\mathrm{rot}\ \vec{B} = 0 \ ,$$

de laquelle découle l'existence d'un potentiel A tel que :

(2.77) $$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ A \ ,$$

qui, vu l'équation de structure (2.70), est régi par l'équation :

(2.78) $$\Delta A = 0 \ .$$

Considérons de nouveau la relation (2.73); compte tenu de (2.75) il en résulte

$$E_i = \pm\left(1 + \frac{e^2}{4} U f^2\right)^{-\frac{1}{2}} E^*_i \ .$$

Introduisant ces expressions dans (2.73), il apparaît qu'elles doivent toutes être déterminées de la même façon, de ce fait on a la formulation vectorielle suivante :

$$(2.79) \qquad \vec{E} = \pm \left(1 + \frac{e^2}{4} e^{2U} \beta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \vec{E}^* ,$$

de laquelle on tire la relation différentielle :

$$(2.80) \qquad dU = \partial_i U \, dx^i = \pm \left(1 + \frac{e^2}{4} e^{2U} \beta^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dV$$

d'où l'on conclut que U est une fonctionnelle de V :

$$(2.81) \qquad U(x) = U\left[V(x) \right] .$$

Nous avons examiné successivement les équations (2.68b), (2.68c); venons en maintenant à (2.68a). Explicitant l'opérateur $\bar{\Delta}$, qu'elle comporte, compte tenu de (2.71a) et (2.81), on obtient :

$$(2.82) \qquad U'' \vec{E}^{*2} + \frac{e^2}{2} e^{2U} \vec{B}^2 = 0 ,$$

on a posé :

$$U' = \frac{dU}{dV} .$$

De cette expression il convient de rapprocher la suivante :

$$(2.83) \qquad (U')^2 \vec{E}^{*2} + \frac{e^2}{4} e^{2U} \vec{B}^2 = \vec{E}^{*2} ,$$

déduite de (2.73) par produit contracté avec $\bar{g}^{ij}$ et en tenant compte aussi de (2.81). On élimine entre ces deux équations le terme $e^{2U} \vec{B}^2$ et l'on obtient alors, après simplification de $\vec{E}^{*2}$ commun aux deux membres, l'équation différentielle suivante :

$$(2.84) \qquad \frac{1}{2} U'' - U'^2 + 1 = 0$$

dont la solution, obtenue sans difficulté, s'écrit :

$$(2.85) \qquad e^{-2U} = p \, sh \, 2V + q \, ch \, 2V$$

où p et q sont des constantes tout à fait arbitraires pour le moment. On achève ensuite en déterminant B_i à partir de (2.73); en faisant $i = j$ dans cette formule, on obtient compte tenu de (2.81) :

$$B_i = \pm 2 e^{-U} \left(1 - U'^2 \right)^{1/2} E^*_i .$$

Dans cette expression on substitue à U' sa valeur déduite de (2.85) et l'on arrive ainsi au résultat suivant :

$$(2.86) \qquad \left| B_i = \pm 2 \left(p^2 - q^2 \right)^{1/2} e^{U} E^*_i \; ; \right.$$

les constantes p et q devant être telles que $|p| \geq |q|$.

Les résultats précédents, (2.85) et (2.86), donnent le champ de gravitation $(\vec{E}, \vec{B})$, et même le potentiel U , correspondant à l'espace-temps stationnaire, en fonction du potentiel V caractéristique de l'espace-temps statique.

Tenant compte des définitions de B_i et E^*_i (2.69) et (2.72), on peut expliciter complètement (2.86) comme suit :

$$(2.87) \qquad \bar{\eta}_i \, j^k \left(\partial_j \Phi_k - \partial_k \Phi_j \right) = \pm 4 \left(p^2 - q^2 \right)^{1/2} \partial_i V \; .$$

La résolution de cette équation permettra, dans les cas concrets, de déduire complètement les coefficients $(g_{\alpha\beta})$ d'une métrique stationnaire de ceux $(g^*_{\alpha\beta})$ de la métrique statique à laquelle, suivant l'hypothèse envisagée, elle se trouve liée par une métrique d'espace commune $\bar{g}_{ij}$.

Remarque. Etant donné un espace-temps stationnaire V_4 par sa métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, on reconnaitra qu'il s'agit d'un espace-temps stationnaire du type particulier que nous venons d'évoquer si les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, (définis en (2.69)) afférents à cet espace-temps, sont colinéaires.

On va voir précisément que la métrique de Newmann, Unti et Tamburino [25] donne un exemple de cette situation.

2 5 2 Exemple; métrique de N.U.T.

Appliquons les résultats acquis précédemment à la métrique de Schwarzschild et montrons qu'il est possible d'en déduire la métrique stationnaire de N.U.T.. On a les expressions bien connues :

$$- g^*_{00} \equiv e^{2V} = \frac{r - \alpha}{r + \alpha}$$

et

$$d\bar{s}^2 = dr^2 + (r^2 - \alpha^2) \, d\omega^2 \; .$$

La formule (2.85) donne le potentiel U de la solution stationnaire associée;

soit :

$$(2.88) \qquad -g_{00} \equiv e^{2U} = \frac{r^2 - \alpha^2}{p(r^2+\alpha^2) - 2q\alpha r} \ .$$

Ensuite par application de la formule (2.86) on obtient :

$$(2.89) \qquad B_1 = \pm 2\alpha \left\{ \frac{p^2 - q^2}{(r^2-\alpha^2)\left[p(r^2+\alpha^2) - 2q\alpha r\right]} \right\}^{1/2} \ , \quad B_2 = B_3 \equiv 0 \ .$$

Enfin à l'aide de (2.87), on détermine Φ_i ; on se limite au cas où la métrique stationnaire associée est à symétrie axiale d'où il suit :

$$\partial_2 \Phi_3 = \pm 2 (p^2 - q^2)^{1/2} \alpha \sin\theta \qquad , \quad \Phi_1 = \Phi_2 \equiv 0$$

et :

$$(2.90) \qquad \Phi_3 = \pm 2 (p^2 - q^2)^{1/2} \alpha \cos\theta + c \qquad , \ (c : \text{constante}).$$

Pour obtenir précisément la métrique de N.U.T. il y a lieu de donner aux constantes α , p , q et c les valeurs particulières suivantes(*) :

$$(2.91) \qquad \alpha^2 = m^2 + b^2 \ , \quad p = 1 \ , \quad q\alpha = -m \ , \quad c = 2b.$$

Si, de plus, on effectue le changement suivant :

$$\bar{r} = r - m \ ,$$

on obtient la métrique de N.U.T. dans sa formulation habituelle, soit :

$$(2.92) \qquad -ds^2 = -\xi^2 \left(dt + 4b \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\varphi\right)^2 + \xi^{-2} d\bar{r}^2 + (\bar{r}^2 + b^2)\, d\omega^2$$

avec

$$(2.93) \qquad \xi^2 \equiv e^{2U} = 1 - 2\frac{m\bar{r} + b^2}{\bar{r}^2 + b^2} \ .$$

Cette solution n'est stationnaire que pour $r > \alpha$.

L'analyse précedente fait apparaître que la métrique de N.U.T. qui, dans le cadre géométrique de l'espace-temps, présente la symétrie axiale, se décompose en une métrique d'espace et un champ de gravitation ($\vec{E}$, $\vec{B}$) associés pourvus de la symétrie sphérique. Selon notre point de vue, on peut donc dire que la métrique de N.U.T. est une solution stationnaire à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide. Ajoutons qu'une considération semblable apparaît dans une publication de C.W. Misner [26] où, en particulier, est étudié le groupe G_4 des transformations isométriques de la variété de N.U.T.

(*) et de retenir le signe - dans (2.90)

En conclusion de cette section, il apparaît au vu des divers cas considérés, que le recours à la métrique conforme constitue un bon moyen de percevoir le caractère commun - l'espace ($V_3, \mathcal{G}$) - aux solutions de la classe envisagée, et spécifique à chacune d'elles - les champs . Dans cette description certains problèmes pourront donc faire l'objet d'un traitement unique valable pour tous les cas tandis que d'autres revêtiront des aspects propres à chacun d'eux. La prochaine section donnera précisément un exemple de cette situation.

III. SINGUALRITES, SOURCES DES SOLUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE

3 1. - Espace (V_3 , $\bar{g}$) - Espace métrique (V_3^* , d^*)

3 1 1 Introduction

Dans cette section nous nous proposons de traiter du problème des singularités et des sources des solutions à symétrie sphérique relatives aux divers champs que nous avons envisagés au cours de la section précédente.

Compte tenu de la convention prescrivant l'usage de coordonnées harmoniques, notée au paragraphe 2 1 , chacune des solutions évoquées se compose, comme nous l'avons vu, d'une part, de la métrique d'espace suivante :

$$(3.1) \qquad d\sigma^2 = dr^2 + (r^2 - \alpha^2)\, d\omega^2$$

qui leur est commune à toutes, et, d'autre part, d'un ou plusieurs champs spécifiques. Nous avons, par exemple, pour la solution de Schwarzschild le seul champ de gravitation dérivant du potentiel :

$$(3.2) \qquad U = \frac{1}{2} \log \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \quad ;$$

pour la solution, dans le cadre de la théorie de Dicke, deux champs dérivant des potentiels $\tilde{U}$ et Ψ :

$$(3.3) \qquad \tilde{U} = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \quad , \quad \Psi = \frac{\alpha}{2\lambda} \log \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \quad , \text{ etc...}$$

Cette communauté de métrique d'espace va permettre, tout d'abord, ainsi qu'on va le voir, de couvrir par un raisonnement unique tous les cas considérés; ce n'est qu'ensuite, pour la caractérisation précise des sources, que des distinctions interviendront. Cette circonstance fait aussi que les raisonnements menés par L. Bel dans [14] à propos de la solution de Schwarzschild seront largement recoupés ici.

3 1 2 . Espace métrique (V_3^* , $\bar{d}^*$).

Soit V_3 la sous-variété ouverte de R_3 des points x tels que : $r \equiv \left[\sum_i (x^i)^2 \right]^{1/2} > \alpha$. Sur $V_3 \times R$ chacune des métriques d'espace-temps, chacun des champs décrit par les solutions étudiées, formulées en (2.2) (2.30) (2.40)... est ou globalement statique, ou globalement stationnaire s'il s'agit de N.U.T. .

Suivant la procédure décrite dans l'appendice (A e) on munit ($V_3, \bar{g}$) d'une distance $\bar{d}$; on définit ainsi l'espace métrique (V_3, $\bar{d}$) que l'on va étudier maintenant. Pour ce faire, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites de Cauchy des points de V_3; chacune d'elles est de l'un des deux types suivants :

(1) Une suite (x_n) est de type I s'il existe un nombre entier k et un nombre réel a tels que pour tout $n > k$ on ait : $r_n \geqslant a > \alpha$.
Toute suite de Cauchy de ce type converge vers un point de V_3.

(2) Une suite (x_n) est de type II si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre entier n tel que : $r_n - \alpha < \epsilon$.

Aucune suite de Cauchy de ce type ne converge dans V_3; l'espace métrique (V_3, $\bar{d}$) est donc incomplet. En employant la méthode de complétion esquissée dans l'appendice (A d) on va la compléter. Pour cela il y a lieu d'étudier les suites de type II et de déterminer leurs classes d'équivalence. On va montrer précisément que toutes ces suites II sont deux à deux équivalentes.

Pour tout couple de points x_m et x'_n de V_3 on a l'inégalité suivante :

$$(3.4) \qquad \bar{d}(x_m, x'_n) \leqslant |r_m - r'_n| + \pi \left(r'^2_n - \alpha^2 \right)^{1/2} ,$$

en raison de (3.1) et de (A.7). Il en résulte que, si (x_m) et (x'_n) sont deux suites de Cauchy de type II, on a :

$$(3.5) \qquad \lim_{n,m \to \infty} \bar{d}(x_m, x'_n) = 0 .$$

Il n'y a donc qu'une seule classe d'équivalence, notons la x_∞. De plus, de (3.4) avec $x_m \equiv x_\infty$ et de :

$$(3.6) \qquad \bar{d}(x_\infty, x'_n) \geqslant r - r_n - \pi \left(r'^2_n - \alpha^2 \right)^{1/2} ,$$

valable pour toute suite (x'_n) de type II dès que n est assez grand, il résulte :

$$(3.7) \qquad \lim_{n \to \infty} \bar{d}(x_\infty, x'_n) = r - \alpha .$$

En conclusion on peut donc dire que l'espace $(V_3^*, d\bar{l}^*)$, complété de $(V_3, d\bar{l})$, contient un seul point additionnel x_o tel que :

$$(3.8) \qquad d\bar{l}^*(x, x_o) = \pi - \alpha \quad \text{pour tout} \quad x \in V_3 .$$

3 1 3 Structure différentielle de V_3 .

L'espace métrique $(V_3^*, d\bar{l}^*)$, complet par construction, peut être muni d'une structure différentiable prolongeant celle de V_3. Pour cela il est nécessaire seulement de définir une carte locale $(\mathcal{B}, \Phi)$: $\mathcal{B}$ étant, par exemple, une boule ouverte centrée en x_o et de rayon b et Φ un homéomorphisme de $\mathcal{B}$ sur la boule euclidienne de centre 0. Nous définissons Φ par :

$$(3.9) \quad \Phi : x_o \longrightarrow O\{0,0,0\} \; ; \; x \longrightarrow y \equiv \begin{cases} y^1 = u \sin\theta\cos\varphi, \; y^2 = u \sin\theta \sin\varphi, \\ y^3 = u\cos\theta \end{cases}$$

où u est déduit de :

$$(3.10) \qquad \pi - \alpha = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{(u+3\alpha)^{\frac{1}{2}}} .$$

Soit $\bar{g}_{\{y\}}$ le déterminant de la métrique $d\bar{s}^2$ (3.1) rapportée au système de coordonnées locales $\{y\}$; son expression sera calculée dans la suite mais nous pouvons déjà la citer :

$$(3.11) \qquad \left[\bar{g}_{\{y\}}\right]^{1/2} = \frac{9\alpha + 2u}{2(3\alpha+u)^{\frac{1}{2}}} \left[u^{3/2} + 2\alpha (u+3\alpha)^{1/2} \right]$$

et faire observer que pour $u \longrightarrow 0$ et aussi pour $u \longrightarrow \infty$, on a $\bar{g}_{\{y\}} \longrightarrow 1$. De plus on apercevra, dans un instant, que le choix (3.10) est compatible avec le comportement asymptotiquement euclidien du $d\bar{s}^2$.

Le système $\{y^i\}$ permet donc de couvrir tout l'espace V_3 , il a un caractère global.

3 2. - Singularité de la métrique et des champs

3 2 1 La métrique

Dans le voisinage de l'origine x_o les coordonnées (u, θ, φ) sont d'un maniement plus aisé que celui des $\{y^i\}$; nous les utiliserons donc. Rapportée

à ce système la métrique d'espace s'écrit :

$$(3.12) \qquad d\bar{s}^2 = \frac{(9\alpha+2u)^2 u}{4(3\alpha+u)^3}\, du^2 + S^2(u)\, d\omega^2$$

où

$$S^2(u) \equiv \frac{u^{3/2}}{u+3\alpha}\left[u^{3/2} + 2\alpha\,(u+3\alpha)^{1/2}\right].$$

On a :

$$(3.13) \qquad (\bar{g})^{1/2} = u^2 \frac{9\alpha+2u}{2(3\alpha+u)^{5/2}}\left[u^{3/2} + 2\alpha\,(u+3\alpha)^{1/2}\right]\sin\theta \;;$$

on en tire facilement (3.11).

. Compte tenu de (3.9) et du fait que, lorsque u tend vers l'infini, le coefficient de du^2 tend vers 1 et $S^2(u)$ vers u^2 , il est clair que la métrique (3.9) présente un comportement asymptotiquement euclidien.

De (3.12) on déduit le corepère orthonormé suivant :

$$(3.14) \qquad \omega^1 = \frac{9\alpha+2u}{2(3\alpha+u)^{3/2}}\, u^{1/2}\, du \;, \quad \omega^2 = S(u)\, d\theta \;, \quad \omega^3 = S(u)\sin\theta\, d\varphi$$

et ensuite les composantes du tenseur de Riemann qui s'écrivent, pour celles qui ne sont pas identiquement nulles, comme suit :

$$(3.15) \qquad \bar{R}_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = \bar{R}_{\hat{1}\hat{3}\hat{1}\hat{3}} = -\bar{R}_{\hat{2}\hat{3}\hat{2}\hat{3}} = \alpha^2 S^{-4}(u) \;.$$

On constate qu'elles tendent vers l'infini lorsque $u \longrightarrow 0$: ceci montre que le point x_0 est singulier pour la structure riemannienne de $\bar{V}_3^*$.

3 2 2 Les champs des solutions statiques

On considère maintenant les champs spécifiques aux divers schémas que nous avons analysés aux paragraphes 2 2 , 2 3 , 2 4.

. Qu'il s'agisse de la solution de Schwarzschild , des solutions déduites de la théorie de Dicke et du schéma champ scalaire, les champs impliqués sont tous déductibles d'un potentiel U de la forme :

$$(3.16) \qquad U = k \operatorname{Log} \xi$$

avec, compte tenu de (3.10) :

$$(3.17) \qquad \xi = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\left[u^{\frac{3}{2}} + 2\alpha\,(u+3\alpha)^{1/2}\right]^{1/2}} \;.$$

Les valeurs de k sont : 1 pour la solution de Schwarzschild (2.2), $\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}$ pour la solution déduite de la théorie de Dicke (2.23) (2.27), (2.28) etc...

Chacun des champs de gravitation $\vec{E}$, par exemple, sera de la forme :

(3.18) $$E_1 = -k\alpha S^{-2} \quad , \quad E_2 = E_3 \equiv 0 .$$

. Dans le cas de la solution de Reissner-Nordström, les quantités introduites s'écrivent, à partir de (2.66) (2.67), comme suit :

(3.19) $$\xi = \frac{S(u+3\alpha)^{1/2}}{u^{3/2} + (\alpha+m)(u+3\alpha)^{1/2}} \qquad (\alpha^2 \equiv m^2 - 4\pi q^2)$$

le champ de gravitation $\vec{E}$:

(3.20) $$E_1 = -\frac{1}{S^2}\left[m - \frac{4\pi q^2 (u+3\alpha)^{1/2}}{u^{3/2} + (u+3\alpha)^{1/2}(\alpha+m)} \right] , \quad E_2 = E_3 \equiv 0$$

l'induction électrique $\vec{\mathcal{D}}$:

(3.21) $$\mathcal{D}_1 = -\frac{q}{S^2} \quad , \quad \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 \equiv 0 .$$

Compte tenu de l'expression de $S(u)$, donnée en (3.12), il est clair que tous ces champs deviennent singuliers pour $u \longrightarrow 0$ c'est à dire au point origine x_o .

3 3. - Identification des sources.

3 3 1 Formule générale.

La caractérisation des sources se fait, dans les cas statiques ou stationnaires que nous considérons, en écrivant les équations du champ sur tout l'espace V_3^*. Dans tout domaine O ne contenant pas l'origine x_o chacune d'elles est satisfaite; par contre lorsque $x_o \in O$ il n'en va plus de même, vu la nature singulière de ce point; cette situation nous conduit tout naturellement à avoir recours à la théorie des distributions [29] pour obtenir la formulation cherchée. Chaque équation du champ considérée est traduite en termes de distributions et le second membre, qui apparaît alors, constitue la source du champ qu'elle régit. Compte tenu de l'aspect localisé de la singularité il est prévisible que la source sera concentrée au point x_o et prendra la forme d'une " densité singulière " comparable, en somme, au second membre d'une équation

intérieure en relativité générale, ou encore à une densité de charges en électrostatique.

Mettons en application le processus qui vient d'être décrit en prenant comme exemple l'équation :

$$\bar{\nabla}_i k^i = 0 \qquad (3.22)$$

où $\vec{k}$ peut être identifié : à $\vec{k}$ dans (1.26) ou (2.16), à $\vec{\mathcal{D}}$ dans (2.51). On suppose que $\vec{k}$ est singulier en x_0 et que ses composantes sont localement sommables; dans ces conditions $\vec{k}$ définit sur V_3^* un vecteur distribution suivant :

$$\langle k^i, \Phi_i \rangle = \int_{V_3^*} k^i \Phi_i \, \bar{\eta} \qquad , \qquad \Phi_i \in \mathcal{D}^1(V_3^*) \qquad (3.23)$$

où $\bar{\eta}$ est l'élément de volume déduit du $d\bar{s}^2$ et $\mathcal{D}^1(V_3^*)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur V_3^*, à support compact, indéfiniment dérivables. On peut maintenant écrire $\bar{\nabla}_i k^i$:

$$\langle \bar{\nabla}_i k^i, \Phi \rangle = - \langle k^i, \partial_i \Phi \rangle \qquad , \qquad \Phi \in \mathcal{D}^0(V_3^*)$$

soit

$$\langle \bar{\nabla}_i k^i, \Phi \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\epsilon)} k^i \partial_i \Phi \, \bar{\eta}$$

où $B(\epsilon)$ est une boule de centre x_0 et de rayon ϵ .

Cette expression peut être transformée comme suit :

$$\langle \bar{\nabla}_i k^i, \Phi \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\bar{V}_3 - B(\epsilon)} \left[\bar{\nabla}_i (k^i \Phi) - \Phi \, \bar{\nabla}_i k^i \right] \bar{\eta} \, .$$

Le second terme sous le signe d'intégration est nul en raison du caractère conservatif de $\vec{k}$; l'application du théorème de Stokes au premier conduit à une intégrale de surface qui, compte tenu de la condition de support satisfaite par Φ , s'écrit comme suit :

$$\langle \bar{\nabla}_i k^i, \Phi \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_2(\epsilon)} k^i \Phi \, d\sigma_i \qquad (3.24)$$

où $S_2(\epsilon) = \partial B(\epsilon)$ la frontière de $B(\epsilon)$.

Cette formule sera appliquée à plusieures reprises dans la suite .

3 3 2 Caractérisation des sources.

. Dans le cas de la solution de Schwarzschild, des solutions déduites de la théorie de Dicke et du schéma champ scalaire, les équations qu'il nous faut considérer sont toutes de la forme suivante :

(3.25) $$\bar{\Delta} U = 0$$

où U est de la forme (3.16) (3.17). Nous allons définir $\bar{\Delta} U$ comme distribution. La fonction U , compte tenu de (3.13), est localement sommable; elle définit donc une distribution :

$$\langle U , \Phi \rangle = \int_{V_3^*} U \Phi (\bar{g})^{1/2} \, du \, d\theta \, d\varphi \qquad , \quad \Phi \in \mathcal{D}^\circ (V_3^*)$$

d'où il suit que $\bar{\Delta} U$ peut être défini comme distribution par :

$$\langle \bar{\Delta} U , \Phi \rangle = \langle U , \bar{\Delta} \Phi \rangle$$

soit

$$\rangle \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V_3^* - B(\epsilon)} U \bar{\Delta} \Phi (\bar{g})^{1/2} \, du \, d\theta \, d\varphi$$

où $B(\epsilon)$ est une boule ouverte de centre x_0 et de rayon ϵ . Cette dernière intégrale peut encore être écrite sous la forme :

$$\langle \Delta U , \Phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V_3^* - B(\epsilon)} \left[\partial_i \left[\bar{g}^{ij} (\bar{g})^{1/2} U \partial_j \Phi \right] - \bar{g}^{11} (\bar{g})^{1/2} \partial_1 \Phi \partial_1 U \right] du \, d\theta \, d\varphi .$$

Enfin, au moyen du théorème de Stokes et compte tenu de la condition de support de Φ , on arrive à l'expression suivante :

(3.26) $$\langle \bar{\Delta} U , \Phi \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_2(\epsilon)} \left(U \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \Phi \frac{dU}{du} \right) \frac{4 (3\alpha + \mu)^3}{\mu (2\alpha + \lambda \mu)^2} (\bar{g})^{1/2} \, d\theta \, d\varphi .$$

Le calcul pratique à effectuer, à partir de U (3.16), ne présente pas de difficulté. On observe simplement que le premier terme sous le signe somme n'apporte aucune contribution car :

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon \, \mathrm{Log} \, \epsilon) = 0$$

et, que dans l'expression du second, la fonction d'essai $\Phi(x)$ peut être remplacée par son développement limité, dans le voisinage de l'origine x_0 , soit

(3.27) $$\Phi(u, \theta, \varphi) = \Phi(x_0) + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{(x_0)} + \epsilon^2 R(\Phi) .$$

Le résultat final, auquel on aboutit, est le suivant :

$$(3.28)\quad \langle \bar{\Delta} U, \Phi \rangle = 4\pi k \alpha \Phi(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\Delta} U = 4\pi k \alpha \delta_{x_0} .$$

Ainsi dans chacun des cas considérés la source est ponctuelle, localisée en x_0 , point origine, et proportionnelle à δ_{x_0} , symbole de la " fonction de Dirac " c'est à dire de la mesure formée d'une " masse " + 1 au point x_0 . La constante de proportionnalité $k\alpha$ est caractéristique du champ considéré.

. Dans le cas de la solution de Reissner-Nordström (2.60) c'est l'équation portant sur l'induction électrique $\vec{\mathcal{D}}$ qu'il y a lieu de considérer:

$$\bar{\nabla}_i \mathcal{D}^i = 0 .$$

La formule (3.24) est immédiatement applicable et nous avons :

$$(3.29)\quad \langle \bar{\nabla}_i \mathcal{D}^i, \Phi \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_2(\epsilon)} \mathcal{D}^i \, \Phi \, d\sigma_i .$$

La surface d'intégration $S_2(\epsilon)$ est, comme précédemment, $u = \epsilon$. Compte tenu de (3.21), de (3.27) et des données déduites de la métrique (3.12), le calcul du second membre de (3.29) se fait facilement et aboutit à :

$$(3.30)\quad \langle \bar{\nabla}_i \mathcal{D}^i, \Phi \rangle = - 4\pi q \Phi(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\nabla}_i \mathcal{D}^i = - 4\pi q \delta_{x_0} .$$

La source du champ électrostatique est localisée en x_0 et proportionnelle à δ_{x_0} ; $q\,\delta_{x_0}$ est la " densité " de charges.

3 4. - Sources de la solution de N.U.T.

3 4 1 Rappel de quelques propriétés de cette métrique

Ayant caractérisé les sources des diverses solutions statiques à symétrie sphérique envisagées à la section II, nous en arrivons maintenant à la détermination de celles de la solution stationnaire de N.U.T. Cependant, avant de traiter cette question, il est souhaitable de rappeler quelques unes des propriétés de cette métrique de N.U.T. pour la mieux situer dans le contexte général.

Redonnons d'abord sont expression :

$$(3.31)\quad ds^2 = - \xi^2 \left(dt + 4b \sin^2 \tfrac{\theta}{2} \, d\varphi \right)^2 + \xi^{-2} dr^2 + (r^2 + b^2)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right)$$

avec

$$(3.32)\qquad \xi^2 = 1 - 2\frac{mr + b^2}{r^2 + b^2} \;;$$

puis énumérons quelques propriétés :

a) d'annulation de b conduit à la métrique de Schwarzschild.

b) elle a un comportement asymptotiquement minkowskien, lorsque $r \longrightarrow \infty$, dans chacune des deux cartes locales spécifiée ci-dessous.

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\theta$$

la métrique de N.U.T. prend alors la forme :

$$ds^2 = -\xi^2\left[dt + 2b\,\frac{x\,dy - y\,dx}{r(r+z)}\right]^2 + \xi^{-2}\,dr^2$$

$$+\frac{r^2+b^2}{r^4}\left[(y\,dx - x\,dy)^2 + (z\,dy - y\,dz)^2 + (x\,dz - z\,dx)^2\right]$$

valable pour le domaine défini comme suit :

$$x, y, z \in \,]-\infty, +\infty[\qquad \text{, avec la restriction } \quad z \neq -r \;.$$

On passe à une seconde carte par la relation :

$$t' = t + 4b\varphi \iff t' = t + 4b\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{y}{x} \;;$$

la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = -\xi^2\left[dt' - 2b\,\frac{x\,dy - y\,dx}{r(r-z)}\right]^2 + \xi^{-2}\,dr^2$$

$$+\frac{r^2+b^2}{r^4}\left[(y\,dx - x\,dy)^2 + (z\,dy - y\,dz)^2 + (x\,dz - z\,dx)^2\right],$$

le domaine étant cette fois

$$x, y, z \in \,]-\infty, +\infty[\qquad \text{, avec la restriction } \quad z \neq r \;.$$

c) Les composantes du tenseur de Riemann, rapportées à la base orthonormée déductible de (3.31), s'expriment comme suit :

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}\hat{2}} = R_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}\hat{3}} = -R_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}\hat{1}} = -R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -\frac{1}{2}R_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}} = \frac{1}{2}R_{\hat{2}\hat{3}\hat{2}\hat{3}} \equiv A$$

$$R_{\hat{0}\hat{2}\hat{3}\hat{1}} = R_{\hat{0}\hat{3}\hat{1}\hat{2}} = -\frac{1}{2}R_{\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}} \equiv B$$

avec :

$$A \equiv \frac{1}{(r^2+b^2)^3}\left[m r^2 + 3b^2 r (r-m) - b^4 \right],$$

$$B \equiv -\frac{b}{(r^2+b^2)^3}\left[r^3 - 3r(mr+b^2) + b^2 m \right].$$

On voit qu'elles sont toujours bornées et qu'elles tendent vers 0 pour $r \longrightarrow \infty$.

Remarque : L'espace-temps de N.U.T. désigne le domaine de variété où la métrique (3.31) est stationnaire, c'est à dire précisément où $\xi^2 > 0$. Le domaine où $\xi^2 < 0$ correspond à un autre espace-temps, non stationnaire, où r est une coordonnée temporelle et t une coordonnée spatiale.

C'est avec cette dernière acception que Taub [28] donna primitivement la métrique (3.31).

3 4 2 Sources de la solution de N.U.T.

. Revenons au formalisme tridimensionnel et écrivons les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, c'est à dire explicitons le champ de gravitation de N.U.T..

Indiquons d'abord:

$$\xi = \frac{S(u)\,(u+3\alpha)^{1/2}}{\left\{\left[u^{3/2}+(\alpha+m)(u+3\alpha)^{1/2}\right]^2 + b^2(u+3\alpha)\right\}^{1/2}}, \qquad (3.33)$$

$$\Phi_3 = \frac{4b}{S}\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \Phi_1 = \Phi_2 \equiv 0 \; ;$$

puis ensuite E_{ij} (1.18) et B_{ij} (1.19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{11} = -\left\{ \frac{1}{S^2}\left[\frac{u^{3/2}}{(u+3\alpha)^{1/2}} + \alpha \right] - \frac{(u+3\alpha)^{1/2}\left[u^{3/2}+m(u+3\alpha)^{1/2}\right]}{\left[u^{3/2}+m(u+3\alpha)^{1/2}\right]^2 + b^2(u+3\alpha)} \right\} \\ E_{12} = E_{22} \equiv 0 \quad ; \end{array} \right. \qquad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{23} = \frac{2b\,(u+3\alpha)^{1/2}}{S\left\{\left[u^{3/2}+m(u+3\alpha)^{1/2}\right]^2 + b^2(u+3\alpha)\right\}^{1/2}} \equiv B_1 \, , \\ B_{31} = B_{12} \equiv 0 \quad . \end{array} \right. \qquad (3.35)$$

Notons enfin h_i (1.26) dont nous aurons besoin :

$$(3.36)\quad \begin{cases} h_1 = -E_1 \ , \\ h_2 = \dfrac{2b^2(1-\cos\theta)\,S^2(u+3\alpha)^2}{\left\{\left[u^{3/2}+m(u+3\alpha)^{1/2}\right]^2+b^2(u+3\alpha)\right\}^2\sin\theta} \ , \\ h_3 = 0 \ . \end{cases}$$

On constate que pour $u = 0$ $(\Rightarrow S=0)$ les expressions (3.34) (3.35) des composantes E_1 et B_1 deviennent infinies; le champ de gravitation $(\vec{E},\vec{B})$ est donc singulier en x_0 .

. Vu le caractère stationnaire de la métrique de N.U.T. , il y a lieu de considérer les deux équations de champ (1.24b) (1.26) :

$$(3.37)\qquad \bar{\nabla}_i h^i = 0$$

$$(3.38)\qquad \bar{\nabla}_i(\xi^3 B^{ij}) = 0$$

en vue de les écrire en termes de distributions.

Il suffit d'appliquer à la première la formule établie à l'alinéa 3 3 1, soit :

$$(3.39)\quad \langle \bar{\nabla}_i h^i, \Phi \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_2(\epsilon)} h^i \Phi \, d\sigma_i \qquad , \quad \Phi \in \mathcal{D}^0(V_3^*) \ .$$

Le calcul effectif du second membre de cette relation est facile à partir de l'expression des composantes de $\vec{h}$ (3.36), de celle de la métrique, du développement de Φ (3.27). Le résultat en est :

$$\underline{\langle \bar{\nabla}_i h^i, \Phi \rangle = -4\pi\alpha\Phi(x_0)} \iff \underline{\bar{\nabla}_i h^i = -4\pi\alpha\delta_{x_0}} \ .$$

La source est encore une fois localisée en x_0 et proportionnelle à la fonction de Dirac.

. Nous avons vu au paragraphe 2 5 que la solution de N.U.T. est un exemple d'espace-temps " particulier " où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. Nous avions noté alors en (2.77) (2.78) que $\vec{B}$ est tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\, A$$

avec

$$\bar{\Delta} A = 0 \ .$$

Il se trouve que, dans le cas présent, pour une question de pure technique de

calcul le vecteur $\vec{B}$, dont les composantes sont explicitées en (2.89) compte tenu de (2.91), est d'un emploi peu commode. Par contre $\vec{B}^*$ dont la définition est $\vec{B}^* = \xi^{-1}\vec{B}$ est d'un maniement plus aisé; en reprenant l'alinéa 2 5 1 on se convainc facilement que l'on a aussi :

(3.41) $$\vec{B}^* = \overrightarrow{grad}\, A^*$$

avec

(3.42) $$\bar{\Delta} A^* = 0 \ .$$

A partir de (3.35) on détermine $\vec{B}^*$; ces composantes s'écrivent :

(3.43) $$B^*_1 = 2b \quad , \quad B_2 = B_3 = 0$$

et l'on obtient pour A^* :

(3.44) $$A^* = \frac{b}{\alpha} \operatorname{Log} \xi + c$$

où ξ est la quantité définie en (3.17). La constante c est prise nulle de telle façon que pour u tendant vers l'infini on ait A^* tendant vers zéro. Pour écrire $\bar{\Delta} A^*$ en tant que distribution il suffit de se référer à l'alinéa 3 3 2 et l'on obtient immédiatement le résultat, à savoir :

(3.45) $$\underline{\langle \bar{\Delta} A^*, \Phi \rangle = 4\pi b\, \Phi(x^\circ)} \iff \underline{\bar{\Delta} A^* = 4\pi b\, \delta_{x^\circ}} \ .$$

Cette relation nous fournit, avec (3.40), deux caractérisations des sources de la solution de N.U.T..

3 4 3 Commentaires - Interprétation de la métrique N.U.T.

Procédant par analogie avec l'électro-magnétisme classique M. Demianski et E.T. Newman [29] ont suggéré l'interprétation suivante des paramètres m et b : m , la masse, est l'analogue de la charge électrique e alors que b serait l'analogue gravitationnel d'un hypothétique monopole magnétique q . L'étude de la structure de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ faite en 2 5 , les résultats (3.40) (3.45), confortent cette interprétation, de plus la localisation des sources se trouve fixée.

IV. SINGULARITES, SOURCES DE LA SOLUTION DE KERR.

4 1. - Métrique d'espace-temps de Kerr - Expressions - Propriétés

4 1 1 Introduction

On se propose maintenant de déterminer les singularités et d'identifier les sources de la solution de Kerr. Pour être en mesure de remplir correctement ce programme il importe, tout d'abord, de donner quelques indications sur la genèse de cette métrique et d'expliciter certaines de ses propriétés.

La métrique de Kerr appartient à une classe particulière de métriques, solutions des équations d'Einstein du vide, dont les coefficients $g_{\mu\nu}$ sont de la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2H\ell_\mu\ell_\nu \qquad (4.1)$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski, H une fonction scalaire et ℓ_μ un champ de vecteurs isotropes par rapport à $\eta_{\mu\nu}$; soit :

$$\eta_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0 \qquad (4.2) \qquad \text{où} \qquad \ell^\mu = \eta^{\mu\nu}\ell_\nu ,$$

d'où il résulte que :

$$g_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = 0 . \qquad (4.3)$$

Ainsi le champ de vecteurs ℓ_μ , isotrope par rapport à la métrique de Minkowski, l'est aussi par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$ (4.1).
Les composantes contravariantes du tenseur métrique s'obtiennent facilement, elles valent :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - 2H\ell^\mu\ell^\nu . \qquad (4.4)$$

R.P. Kerr et A. Schild [30] ont étudié précisément les solutions de la forme (4.1); citons quelques-unes des propriétés de (4.1), qu'ils ont mises en évidence.

a. - Toutes les métriques de cette forme sont algébriquement dégénérées au sens de la classification de Bel-Petrov [31] , ℓ_μ étant vecteur principal du tenseur de courbure. Ainsi la congruence associée à ℓ_μ est géodésique et sans distorsion; en choisissant convenablement H , ℓ_μ peut être normalisé

de telle sorte que :

$$(4.5) \qquad l^\mu \nabla_\mu l_\nu = 0 .$$

b. - Elles admettent un groupe d'isométries à un paramètre. Le vecteur de Killing $\vec{\xi}$, générateur du groupe, est aussi vecteur de Killing de la métrique minkowskienne. En fait, la transformation est une translation le long d'une direction qui peut être de genre temps, espace ou isotrope dans l'espace-temps de Minkowski. Il y a ainsi trois cas :

$$(4.6) \qquad \begin{cases} b_1 & \eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu < 0 \\ b_2 & \eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu > 0 \\ b_3 & \eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0 . \end{cases}$$

c. - Dans chacun des cas la solution générale est déterminée par une fonction analytique arbitraire.

4 1 2 Métrique de Kerr. Diverses formes. Propriétés.

La métrique de Kerr [8] est une solution de type b_1 , donc stationnaire, correspondant au choix d'une fonction analytique particulière dépendant d'un paramètre a . Rapportant la métrique de Minkowski à un système de coordonnées cartésien (t , x , y , z), la métrique de Kerr s'écrit :

$$(4.7) \qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \\ & + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}\left[dt + \frac{r}{a} dz + \frac{r}{r^2+a^2}(x\,dx + y\,dy) + \frac{a}{r^2+a^2}(x\,dy - y\,dx)\right]^2 \end{aligned}$$

où r est une fonction réelle des coordonnées (x , y , z) définie implicitement par la relation :

$$(4.8) \qquad \frac{x^2+y^2}{r^2+a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

et dont l'écriture explicite est :

$$(4.9) \qquad r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ R^2 - a^2 + \left[(R^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

où

$$\tilde{r} \equiv \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} . \qquad (4.10)$$

Nous constatons que la fonction $r(x,y,z)$ présente une double détermination; nous verrons, ci-dessous, les conséquences de ce fait sur la structure de l'espace-temps de Kerr.

A l'aide du changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} x + iy = (r - ia)\, e^{i\varphi} \sin\theta \\ z = r\cos\theta \\ t = u - r \end{cases} \qquad (4.11)$$

on passe à une seconde forme de la métrique :

$$\begin{aligned} -ds^2 = \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + 2\left(du + a\sin^2\theta\, d\varphi\right)\left(dr + a\sin^2\theta\, d\varphi\right) \\ - \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)\left(du + a\sin^2\theta\, d\varphi\right)^2 . \end{aligned} \qquad (4.12)$$

on a posé :

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta . \qquad (4.13)$$

Cette expression met en évidence que la solution de Kerr est pourvue de la symétrie axiale.

Indiquons quelques propriétés de cette métrique utiles pour la suite de l'étude.

a) La métrique de Kerr dépend de deux constantes m et $a > 0$. L'annulation de m conduit à la métrique de Minkowski, celle de a à la métrique de Schwarzschild, on le voit facilement sur (4.7) et (4.12).

b) Les composantes du tenseur de courbure sont obtenues par combinaison linéaire des deux expressions suivantes:

$$A = \frac{mr}{\rho^6}\left(r^2 - 3a^2\cos^2\theta\right) \quad , \quad B = \frac{ma\cos\theta}{\rho^6}\left(3r^2 - a^2\cos^2\theta\right). \qquad (4.14)$$

Elles s'annulent identiquement pour $m = 0$ et deviennent infinies pour $\rho^2 = 0$ c'est à dire, d'après (4.13), lorsque $r = 0$ et $\cos\theta = 0$.

c) La métrique a un comportement asymptotiquement minkowskien pour $\tilde{r} \to \infty$, cela est manifeste au vu des expressions (4.7) (4.9) (4.10). Il importe d'observer qu'en raison de la double détermination de r (4.9), la métrique

revêt deux formulations limites. En effet, pour $\tilde{r} \longrightarrow \infty$ on a $r \simeq \pm \tilde{r}$ et ainsi il vient :

$$(4.15)\quad \begin{cases} \cdot \text{ pour } \quad r>0: & ds^2 \simeq dx^2+dy^2+dz^2-dt^2+\frac{2m}{\tilde{r}}\left(dt+\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\tilde{r}}\cdots\right)^2 \\ \cdot \text{ pour } \quad r<0: & ds^2 \simeq dx^2+dy^2+dz^2-dt^2-\frac{2m}{\tilde{r}}\left(dt+\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\tilde{r}}\cdots\right)^2 \end{cases}$$

L'étude du mouvement d'une particule d'épreuve, pour de grandes valeurs de $\tilde{r}$, conduit à donner un signe positif à la constante m lorsque $r>0$ et un signe négatif lorsque $r<0$. Il y a donc deux régions d'espace-temps où la métrique de Kerr présente un comportement asymptotiquement minkowskien. En d'autres termes si l'on considère que m représente la masse du corps central, source du champ, celle-ci sera perçue comme positive ou négative selon le signe positif ou négatif de r. Pour remédier à cette situation, quelque peu inconfortable, on peut être tenté de limiter l'espace-temps au seul domaine déterminé par $r \geqslant 0$, on va voir ci-dessous en étudiant les coefficients $g_{\alpha\beta}$ de la métrique quelles seraient les implications d'une telle restriction.

d) Si l'on considère l'ensemble complet des valeurs de r (4.9), les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions analytiques en tout point sauf lorsque $\rho^2=0 \Longleftrightarrow \{ r=0 \ , \cos\theta=0 \}$, où certains deviennent infinis. Dans chaque section d'espace $x^0 = \text{cte}$ la sous-variété à deux dimensions définie par :

$$(4.16)\quad \begin{cases} r=0 \\ \text{ou} \\ z=0 \quad , (x^2+y^2)^{1/2} \leqslant a \end{cases}$$

est un " disque " $\mathbb{D}$ centré sur l'origine O et de rayon a, d'après (4.11) la périphérie de ce disque $\mathbb{D}$ est la " circonférence " Γ :

$$(4.17)\quad z=0 \quad \text{et} \quad (x^2+y^2)^{1/2}=a.$$

Revenons sur l'hypothèse que nous émettions en fin du sous-alinéa (c), à savoir : la limitation de l'espace-temps au domaine des valeurs $r \geqslant 0$ et voyons ces conséquences. L'examen de (4.7) ou (4.12) montre que alors la dérivée dans une direction normale à $\mathbb{D}$ des coefficients présente, pour certains d'entre eux, une discontinuité de première espèce à la traversée du disque $\mathbb{D}$ ouvert. Indiquons l'expression de ces discontinuités. Pour ce faire, il est commode de substituer au système de coordonnées (t,x,y,z) un système de coordonnées cylindriques (t,η,z,φ) telles que :

$$(4.18)\quad \eta^2 = x^2+y^2 \quad , \ tg\,\varphi = \frac{y}{x}$$

et d'y rapporter la métrique qui s'écrit alors :

$$(4.19)\quad ds^2 = d\eta^2 + dz^2 + \eta^2 d\varphi^2 - dt^2 + \frac{2m\pi^3}{\pi^4+a^2z^2}\left[dt + \frac{z}{\pi}dz + \frac{\pi\eta\, d\eta + a\eta^2 d\varphi}{\pi^2+a^2}\right]^2.$$

Les discontinuités des $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$, que l'on se propose d'évaluer, sont déterminées par la formule suivante :

$$(4.20)\quad \left[\partial_\lambda g_{\alpha\beta}\right]_{z=0} \equiv \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\lambda g_{\alpha\beta}\right)_{z=+0} - \left(\partial_\lambda g_{\alpha\beta}\right)_{z=-0}\right\} = p_\lambda \beta_{\alpha\beta}$$

où p_λ est la normale au disque $\mathbb{D}$ et $\beta_{\alpha\beta}$ les fonctions sauts.

A partir de (4.9) (4.19) (4.29) on obtient explicitement :

$$(4.21)\quad p_\lambda : \left[\, 0 \quad , \quad 0 \quad , \frac{\epsilon}{\left(1 - \frac{\eta^2}{a^2}\right)^{1/2}} \quad , \quad 0 \,\right]$$

où ϵ vaut + 1 pour la normale à la face supérieure du disque $\mathbb{D}\ (z=+0)$ et ϵ vaut - 1 pour celle à la face inférieure du disque $\mathbb{D}\ (z=-0)$; et :

$$(4.22)\quad \begin{cases} \beta_{00} = \dfrac{2m}{a^2-\eta^2} \quad , \quad \beta_{22} = \dfrac{2m}{a^2} \quad , \quad \beta_{33} = \dfrac{2m\,\eta^4}{a^2(a^2-\eta^2)} \\ \beta_{03} = \dfrac{2m\,\eta^2}{a(a^2-\eta^2)} \quad , \text{ les autres } \beta_{\lambda\mu} \text{ sont identiquement nuls.} \end{cases}$$

On sait que ce type de discontinuité (superficielle) est interprêtée physiquement comme traduisant l'existence d'une couche simple de matière.

A. Papapetrou et A. Hamoui ont développé dans [32] une méthode d'étude des couches simples de matière en relativité générale; en utilisant certains des résultats qu'ils ont obtenus nous allons pouvoir déterminer les caractéristiques de la distribution matérielle constitutive du disque $\mathbb{D}$.

La procédure consiste à écrire à la surface du disque $\mathbb{D}$ les équations suivantes, déduites par les auteurs cités, des équations d'Einstein écrites en termes de distributions :

$$(4.23)\quad \mathcal{S}_{\mu\nu} = \lambda\, \tau_{\mu\nu}\Big|_{\mathbb{D}}$$

avec

$$(4.24)\quad \tau_{\mu\nu} \equiv \sigma\, u_\mu u_\nu + \mathcal{M}_{\mu\nu}$$

où σ est la densité totale d'énergie, u_μ la quadrivitesse et $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ le tenseur de tension. Toutes ces quantités ont pour support le disque $\mathbb{D}$ ouvert.

L'expression de $\mathcal{S}_{\mu\nu}$, déduite de (4.20), est :

$$(4.25)\quad \mathcal{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\beta_{\mu\nu} p_\alpha p^\alpha + \beta\, p_\mu p_\nu - \left(\beta_{\mu\alpha} p_\nu + \beta_{\nu\alpha} p_\mu\right) p^\alpha - g_{\mu\nu}\left(\beta\, p_\alpha p^\alpha - \beta_{\lambda\sigma} p^\lambda p^\sigma\right)\right]$$

où

$$\beta \equiv g^{\mu\nu}\beta_{\mu\nu} .$$

A l'aide de (4.21) et (4.22), on calcule, d'après (4.25), le membre gauche de (4.23) et l'on en déduit les éléments constitutifs du membre droit $\tau_{\mu\nu}$.

On obtient ainsi pour expression de la densité σ :

(4,26) $$\sigma(\eta) = -\frac{m}{2\pi a^2}\,\frac{1}{1-\eta^2/a^2}\,.$$

Cette quantité est négative pour tous les points du disque ouvert et devient infinie négative pour $\eta \longrightarrow a$. Les autres quantités sont toutes aussi peu satisfaisantes physiquement; par exemple, la vitesse linéaire tangentielle, déduite de u^0 et u^3, vaut :

$$v(\eta) = -\frac{a}{\eta}\,,$$

elle est toujours en valeur absolue supérieure à 1 (c. à.d. à c) et tend vers l'infini pour $\eta \longrightarrow 0$.

En conclusion il apparaît que la distribution superficielle impliquée par l'hypothèse $r \geqslant 0$ est absoluement incompatible avec les caractéristiques des milieux physiques; l'hypothèse considérée ne peut donc être admise. Il y a lieu alors de décrire la structure de l'espace-temps correspondant à $-\infty < r < +\infty$ en relation avec les considérations du sous-alinéa (c).

e) Pour rendre compte de cette structure on peut considérer que l'espace-temps de Kerr se compose de deux domaines ayant en commun le disque $\mathbb{D}$. Le premier domaine, où $r \geqslant 0$, est couvert par les coordonnées (x, y, z) déjà introduites en 4 1 2, le second où $r \leqslant 0$ par des coordonnées (x', y', z') du même type que les précédentes. Le disque $\mathbb{D}$, qui correspond à $r = 0$, a pour équations :

$$\left\{ z = 0 \;,\; x^2 + y^2 < a^2 \right\} \Longleftrightarrow \left\{ z' = 0 \;,\; x'^2 + y'^2 < a^2 \right\}$$

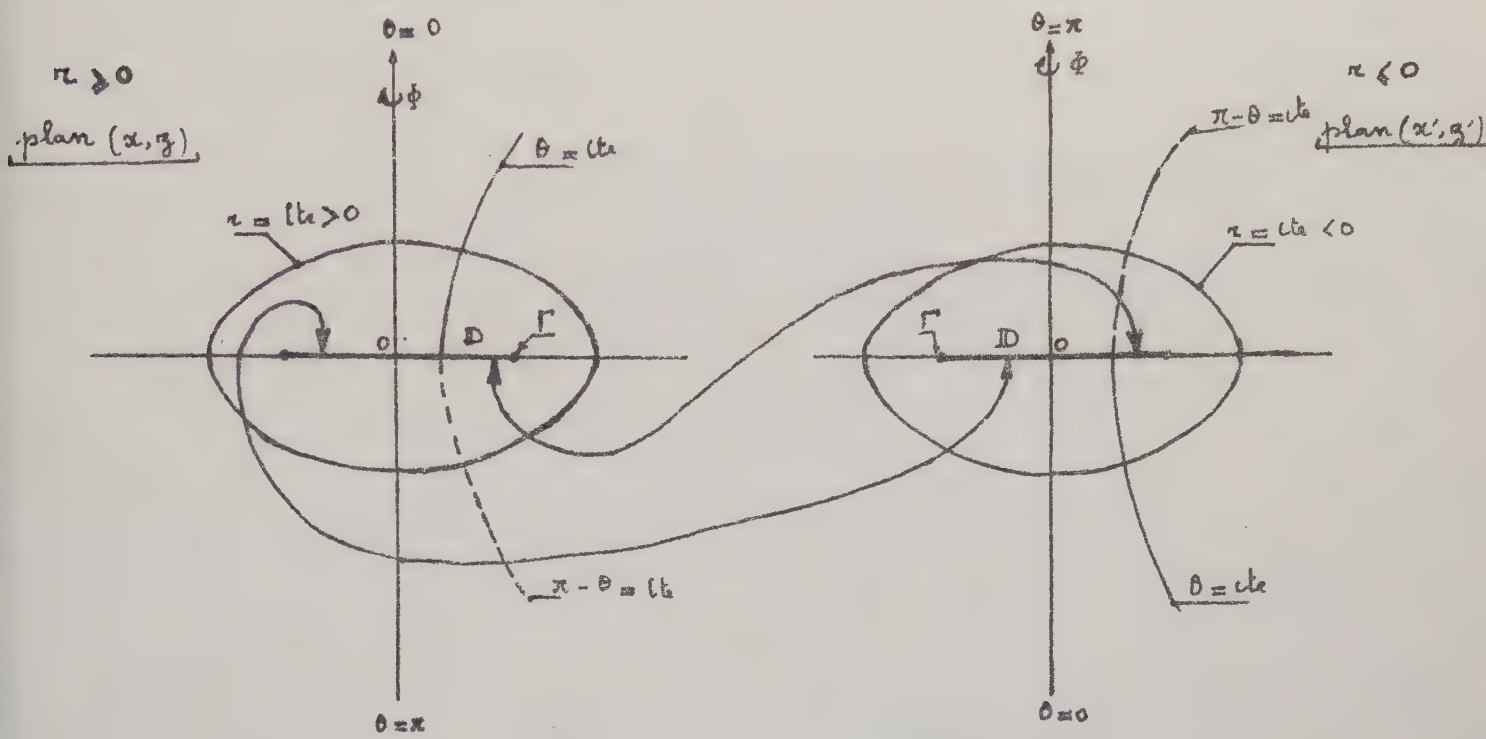
et l'on identifie chacun des points de la face supérieure du disque $\mathbb{D}$ dans le domaine $r \geqslant 0$ avec le point correspondant de la face inférieure du disque $\mathbb{D}$ dans le domaine $r \leqslant 0$.

Dans chacun des domaines évoqués les surfaces correspondant à des valeurs constantes de r et de θ et dont les équations sont les suivantes :

(4.27) et
$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \qquad \text{(idem pour } x', y', z' \text{)}$$
$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1$$

constituent des familles, respectivement, d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes de résolution homofocaux ; la ligne des foyers étant la circonférence Γ (4.17).

La situation que nous venons de décrire est schématisée par la figure [33] suivante correspondant aux sections $y=0$, $y'=0$:



(fig. 1)

Ajoutons qu'aux systèmes (x, y, z) et (x', y', z') on peut associer des coordonnées polaires $(\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ comme suit :

$$(4.28)\quad \begin{cases} x = \tilde{r} \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\varphi} \\ y = \tilde{r} \sin\tilde{\theta} \sin\tilde{\varphi} \\ z = \tilde{r} \cos\tilde{\theta} \end{cases}$$

, mêmes formules pour (x', y', z')

avec $\tilde{r} = + (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\tilde{r} = - (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$.

f) La métrique de Kerr est une solution stationnaire à symétrie axiale, de ce fait elle peut être écrite d'une manière dite canonique [34] ne comportant qu'un seul terme rectangle g_{03} et aussi, comme (4.12), doublement adaptée à ses caractères de symétrie. Cette formulation, que nous utiliserons

dans la suite, se déduit de (4.12) par le changement de coordonnées suivant :

$$(4.29)\quad \begin{cases} du = dt + \dfrac{r^2+a^2}{\Delta^2}\,dr \\ d\varphi = d\Phi - \dfrac{a}{\Delta^2}\,dr \end{cases}$$

et s'écrit :

$$(4.30)\quad ds^2 = -\left(1-\frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{4mr}{\rho^2}a\sin^2\theta\,dt\,d\Phi + \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta^2}+d\theta^2\right) + \left(r^2+a^2+\frac{2mr}{\rho^2}a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\,d\Phi^2 .$$

On a posé :

$$(4.31)\quad \Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2mr .$$

Indiquons, en relation avec (4.28), que :

$$\Phi = \tilde{\varphi} .$$

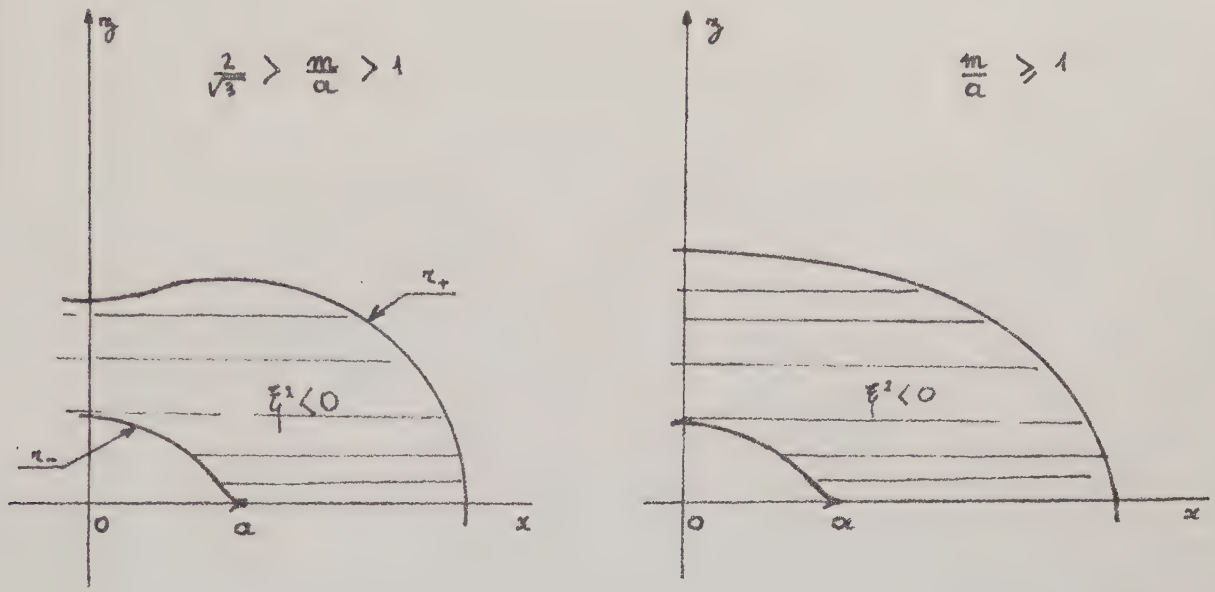
4 1 3 Domaines de stationnarité de la métrique.

Suivant l'étude générale des espaces-temps stationnaires, développée à la première section, ce domaine est déterminé par $\vec{\xi}^2 \equiv -\xi^2 < 0$, soit en coordonnées adaptées : $\xi^2 \equiv -g_{oo} > 0$ et donc, dans le cas présent, la limite du domaine de stationnarité est fixée par l'équation :

$$(4.32)\quad -g_{oo} \equiv 1 - \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta} = 0 \quad .$$

L'étude de cette expression montre que les surfaces représentatives correspondantes présentent des formes différentes suivant les valeurs du rapport $\frac{m}{a}$; il y a lieu de distinguer les cas : $\frac{m}{a} > 1$, $\frac{m}{a} < 1$ et enfin le cas limite $\frac{m}{a} = 1$. L'allure des courbes, traces de ces surfaces sur un plan axial ($y = 0$ par exemple), est donnée par les croquis ci-dessous; en raison des symétries il suffit de représenter un quadrant :

. $\frac{m}{a} > 1$ A l'intérieur de ce cas il y a encore les deux possibilités suivantes



(fig. 2)

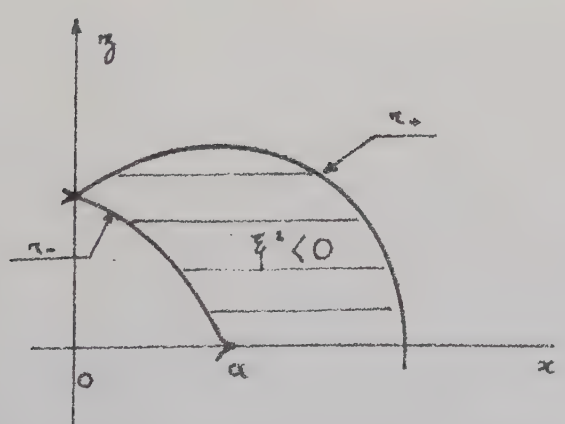
Les surfaces d'équation (4.32) se composent de deux nappes :

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$$

(4.33) et

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$$

. $\frac{m}{a} = 1$

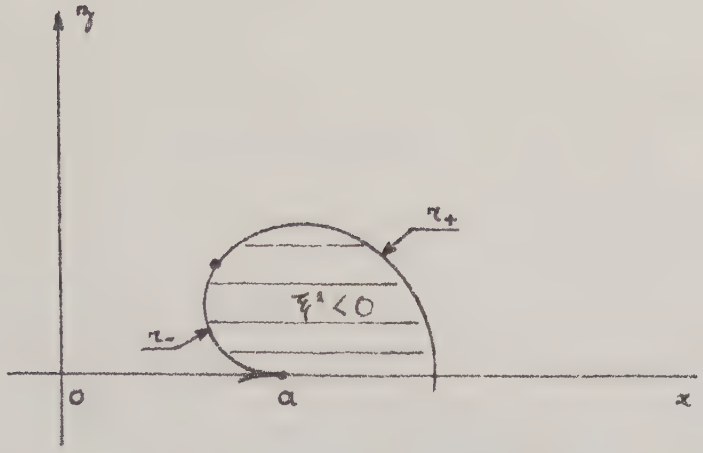


Dans ce cas on a encore deux nappes :

$$r_+ = m(1 + \sin\theta) \qquad \text{et} \qquad r_- = m(1 - \sin\theta)$$

elles se rejoignent aux points : $(0, 0, z = \pm m)$.

$\frac{m}{a} < 1$



Dans ce cas les surfaces étudiées ne comportent plus qu'une seule nappe décrite, d'une part, pour la partie correspondant aux valeurs de r telles que $r \geqslant m$, par l'équation :

$$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$$

et, d'autre part, pour la partie correspondant à $r \leqslant m$, par :

$$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta} \quad ;$$

le raccordement entre ces deux domaines, s'effectuant au long des circonférences d'équations:

$$\left\{ r = m \ , \ \cos\theta = \pm \frac{m}{a} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right) \ , \ z = \pm \frac{m^2}{a} \right\}.$$

Il importe encore de préciser que toutes les surfaces d'équation (4.32) présentent une ligne de rebroussement suivant la circonférence singulière Γ dont les équations, notées en (4.17), sont :

$$\left\{ z = 0 \ , \ (x^2 + y^2)^{1/2} = a \right\}$$

et aussi qu'elles sont entièrement contenues dans le domaine $r \geqslant 0$, (voir fig. 1 alinéa 4 1 2 e).

Muni de toutes ces informations nous sommes en mesure d'étudier maintenant les singularités et les sources de la solution de Kerr. Nous examinerons seulement les cas où m et a sont tels que : $\frac{m}{a} \geqslant 1$.

4 2. - Espace (V_3, $\bar{g}$) - Espace métrique associé (V_3^*, d^*).

4 2 1 Espace métrique (V_3^*, d^*).

Partant de la métrique d'espace-temps de Kerr, sous la forme (4.30), on détermine facilement la métrique d'espace; elle s'écrit :

(4.34) $$d\bar{s}^2 = (\rho^2 - 2mr)\left(\frac{dr^2}{\Delta^2} + d\theta^2\right) + \Delta^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 .$$

Rappelons que l'on a posé :

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \quad \text{et} \quad \Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2mr .$$

Soit V_3 la sous-variété ouverte de $\mathbb{R}_3$ des points $x(r,\theta,\varphi)$ tels que : $r - \left(m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}\right) > 0$. Sur $V_3 \times \mathbb{R}$ la métrique d'espace-temps de Kerr est globalement stationnaire. (Ajoutons qu'elle l'est aussi sur un autre domaine que nous ne considérons pas et qui correspond aux points $x(r,\theta,\varphi)$ tels que : $r - \left(m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}\right) < 0$). Suivant la procédure notée dans l'appendice (Ae), et déjà utilisée à l'alinéa 3 1 2, on munit (V_3, $\bar{g}$) d'une distance d .

On va montrer le résultat suivant :

L'espace métrique (V_3, d) est incomplet; son complété (V_3^*, d^*) contient un point additionnal x_0 dans le cas où $\frac{m}{a} \geq 1$.

Pour aboutir à ce résultat on doit considérer l'ensemble Φ des suites de Cauchy de points $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$ de V_3; chacune d'elles est de l'un des types suivants :

(1) Une suite x_n est du premier type s'il existe un nombre entier k et un nombre réel $\eta > 0$, tel que, pour tout $n > k$, on ait :

$$r_n - \left(m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta_n}\right) \geq \eta > 0$$

Toute suite de ce type converge vers un point x de V_3.

(2) Une suite x_n est du second type si quelque soit $\epsilon > 0$ il existe un nombre entier n tel que :

(4.35) $$r_n - \left(m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta_n}\right) \leq \epsilon .$$

Aucune suite de ce type ne converge dans V_3; l'espace métrique (V_3, d) est donc incomplet. Nous allons le compléter au moyen de la méthode de complétion décrite à l'appendice (A d). Pour cela il faut déterminer les classes

d'équivalence des suites (2). On va montrer précisément qu'elles sont deux à deux équivalentes et que, de ce fait, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

Pour établir cette proposition on considère deux suites quelconques $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$ et $x'_m(r'_m, \theta'_m, \varphi'_m)$ et l'on va évaluer la distance $\bar{d}(x_n, x'_m)$ en suivant le circuit (voir fig. 3-4) :

$$(4.36)\quad x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n) \longrightarrow x^*_p(r_n, \theta_n, \varphi'_m) \longrightarrow x^+_q(r^+_q, \theta_n, \varphi'_m) \longrightarrow x'_m(r'_m, \theta'_m, \varphi'_m)$$

dans lequel on a introduit, entre x_n et x'_m, les points intermédiaires x^*_p et x^+_q. Les divers points indiqués en (4.36) ont les positions relatives suivantes :

. x^*_p appartient à la surface équipotentielle (ξ_n) qui passe en x_n et dont l'équation est :

$$(4.37)\qquad 1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \xi_n^2 \quad \text{où } \xi_n \text{ : constante} > 0$$

soit plus précisément, car il faut exclure r_- (4.33) :

$$(4.38)\qquad r = \frac{m}{1-\xi_n^2} + \sqrt{\left(\frac{m}{1-\xi_n^2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta}\quad ;$$

x_n et x^*_p diffèrent seulement par la valeur de la coordonnée φ.

. x^+_q appartient à la surface équipotentielle (ξ'_m) passant par x'_m, se situe dans le même plan méridien φ'_m, mais possède des coordonnées r et θ différentes de celles de x'_m.

En vertu de l'inégalité triangulaire on a :

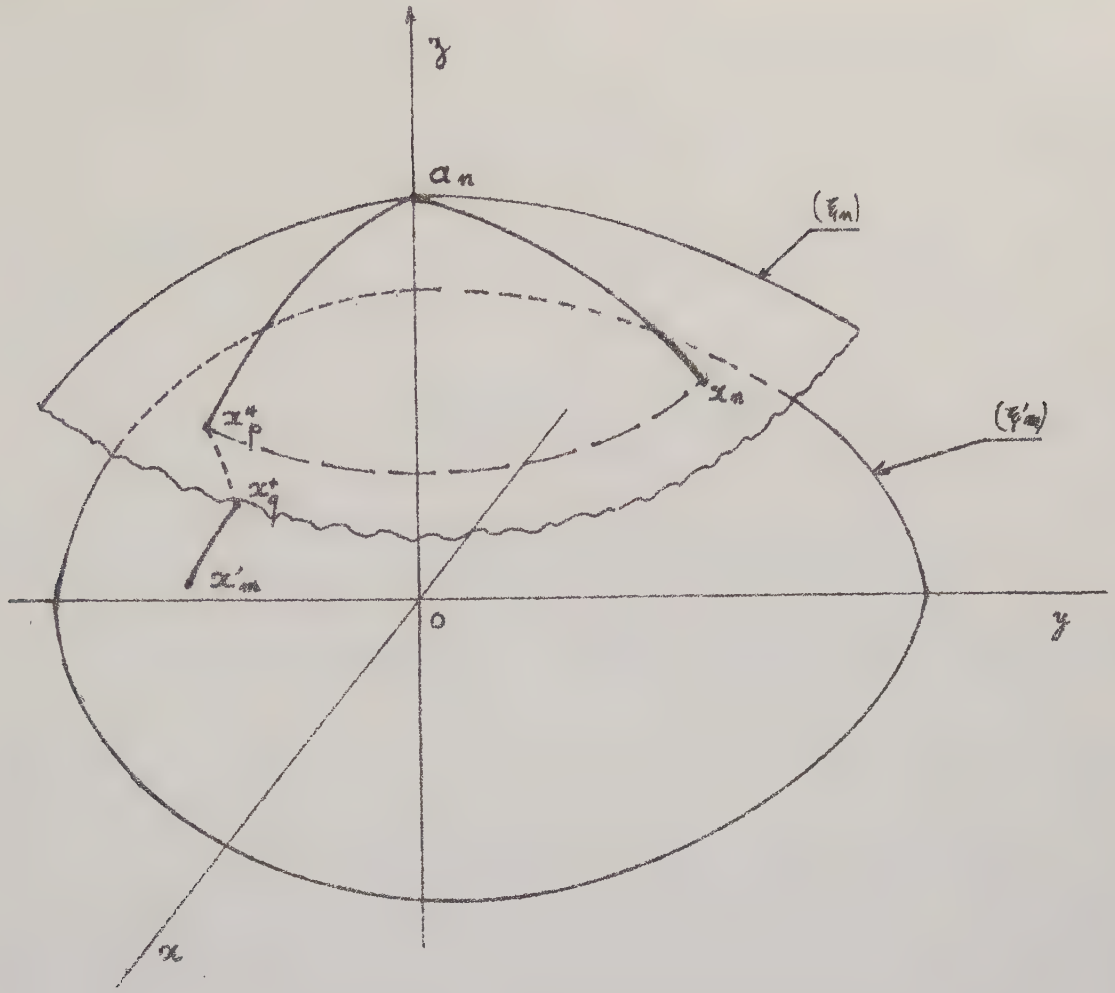
$$(4.39)\qquad \bar{d}(x_n, x'_m) \leq \bar{d}(x_n, x^*_p) + \bar{d}(x^*_p, x^+_q) + \bar{d}(x^+_q, x'_m)$$

d'où il résulte que l'on pourra donner une majoration de $\bar{d}(x_n, x'_m)$ en obtenant une majoration de chacun des termes du membre droit. C'est ce processus que nous allons exposer maintenant :

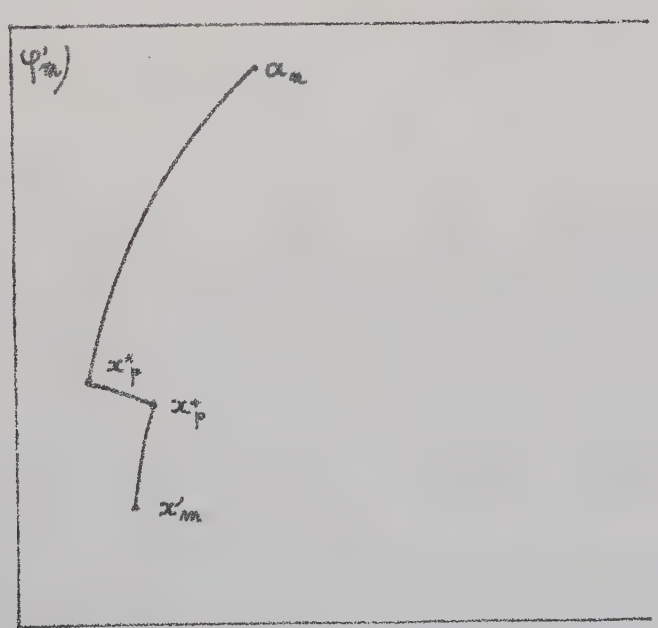
a) On peut borner la distance $\bar{d}(x_n, x^*_p)$ par la valeur de la longueur des arcs des méridiens de la surface (ξ_n) correspondant aux angles φ_n et φ'_m et dont les extrémités respectives sont x_n et x^*_p, d'une part et le point a_n intersection de la surface (ξ_n) avec l'axe $z'z$ $(z>0)$, d'autre part (voir fig. 3-4). On a la formulation :

$$(4.40)\qquad \bar{d}(x_n, x^*_p) \leq \int_{x_n}^{a_n} dl_n + \int_{a_n}^{x^*_p} dl_n \ .$$

(fig. 3) circuit $x_n \longrightarrow x'_m$



(fig. 4) plan méridien (φ'_m)



- x_n, a_n et x^*_p $\in$ surface (ξ_n)
- x^+_q et x'_m $\in$ surface (ξ'_m)

Les coordonnées de a_n, déduites de (4.38), sont :

$$\left\{ r = \frac{m}{1-\xi_n^2} + \sqrt{\left(\frac{m}{1-\xi_n^2}\right)^2 - a^2}\,,\ \theta = 0\,,\ \varphi : \text{indéterminé} \right\} .$$

dl_n désigne l'élément d'arc de méridien de la surface (ξ_n) ; on l'obtient à partir de l'expression de la métrique induite ds^2 par $d\bar{s}^2$ (4.34) sur la surface (ξ_n) d'équation (4.38), soit :

$$(4.41)\quad ds^2 = \xi_n^2 \rho^2 \left[1 + \frac{4 r^2 a^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\Delta^2 (r^2 - a^2\cos^2\theta)^2} \right] d\theta^2 + \left(\xi_n^2 \rho^2 + a^2 \sin^2\theta \right) \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

dans laquelle il suffit de faire $\varphi = \text{cte}$.
Il en résulte l'expression développée de l'inégalité (4.40) :

$$(4.42)\quad \bar{d}(x_n, x_p^*) \leqslant 2\xi_n \int_0^{\theta_n} \rho \left[1 + \frac{4 r^2 a^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\Delta^2 (r^2 - a^2\cos^2\theta)^2} \right]^{1/2} d\theta \equiv \xi_n K_1(\xi_n).$$

Dans cette expression, comme dans celle de la métrique ds^2, r est fonction de θ suivant la formule (4.38).

Il convient d'observer que l'intégrale figurant au membre droit de (4.42) existe effectivement et est bien bornée pour toute valeur (ξ_n) assez petite et en particulier pour $\xi_n \longrightarrow 0$. On vérifierait facilement que cette considération est bien fondée en substituant, dans l'intégrand, à Δ^2 et à $(r^2 - a^2\cos^2\theta)$ leurs expressions écrites à l'aide de ξ_n , soit précisément :

$$(4.43)\quad \Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2mr \equiv \xi_n^2 \rho^2 + a^2 \sin^2\theta$$

$$r^2 - a^2\cos^2\theta \equiv 2r \sqrt{\left(\frac{m}{1-\xi_n^2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta}\ .$$

Remarque. Comme les points $x_n(r_n, \theta_n, \varphi_n)$ et $x_p^*(r_n, \theta_n, \varphi'_n)$ sont situés sur le même parallèle $\theta = \theta_n$, on aurait pu songer à borner la distance $\bar{d}(x_n, x_p^*)$ par la valeur de l'intégrale curviligne calculée le long de celui-ci entre $\varphi = \varphi_n$ et $\varphi = \varphi'_n$. Cette majoration, très naturelle à priori, n'est pas assez fine car elle conduit à :

$$(4.42')\quad \bar{d}(x_n, x_p^*) \leqslant \left(\xi_n^2 \rho^2 + a^2 \sin^2\theta_n \right)^{1/2} \sin\theta_n \left| \varphi_n - \varphi'_n \right|$$

au lieu de (4.42); elle ne montre pas, à la différence de (4.42), que

$$d^*(x_n, x_p^*) \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque} \qquad \xi_n \longrightarrow 0\ .$$

b) Les points x^-_p et x^+_q appartiennent au même plan méridien φ'_m , ils sont situés sur la courbe coordonnée $\theta = \theta_m$ qui, d'après (4.27), est un arc d'hyperbole (voir fig. 3-4).

On peut majorer $d(x^-_p, x^+_q)$ par la valeur de la longueur de l'arc, de cette courbe, compris entre les surfaces (ξ_m) et (ξ'_m), et joignant x^-_p à x^+_q ; soit d'après (4.34) :

$$(4.44) \qquad d(x^-_p, x^+_q) \leq \int_{r_m}^{r^+_q} \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2\cos^2\theta_m - 2m r \right)^{1/2} dr$$

et, supposant :

$$(4.45) \qquad \xi'_m \geqslant \xi_n ,$$

on peut majorer comme suit le membre droit de l'inégalité précédente :

$$(4.46) \qquad d(x^-_p, x^+_q) \leq \frac{\xi'_m \rho^+_q}{\left(\xi'^2_m \rho^{+2}_q + a^2 \sin^2\theta_m\right)^{1/2}} \left| r^+_q - r_m \right| = \xi'_m K_2(\xi'_m).$$

L'on a posé :

$$\rho^{+2}_q = r^{+2}_q + a^2\cos^2\theta_m ,$$

et utilisé l'identité (4.13) ainsi que l'équation (4.37). En remplaçant, dans le membre droit de cette inégalité, r^+_q et r_m par leurs expressions déduites de (4.38) on se convaincrait facilement que la quantité notée K_2 est bien définie et limitée pour toute valeur de ξ (assez petite) y compris pour $\xi \longrightarrow 0$.

c) Enfin les points x^+_q et x'_m appartiennent à la surface (ξ'_m) et sont situés dans le même plan méridien φ'_m (voir fig. 3-4). La majoration de $\bar{d}(x^+_q, x'_m)$ se fait en évaluant la longueur de l'arc de méridien joignant x^+_q à x'_m. On a, de même qu'en (a), la formulation :

$$(4.47) \qquad \bar{d}(x^+_q, x'_m) \leq \xi'_m \int_{\theta_m}^{\theta'_m} \rho \left[1 + \frac{4 r^2 a^4 \sin^2\theta\cos^2\theta}{\Delta^2 (r^2 - a^2\cos^2\theta)^2} \right]^{1/2} d\theta = \xi'_m K_3(\xi'_m)$$

où

$$r(\theta) = \frac{m}{1-\xi'^2_m} + \sqrt{\left(\frac{m}{1-\xi'^2_m}\right)^2 - a^2\cos^2\theta} .$$

L'observation notée en (a), vaut encore ici : l'intégrale figurant au membre droit de (4.47) existe et est bornée.

Appliquant l'inégalité (4.39) aux expressions (4.42) (4.45) (4.46) on obtient finalement :

(4.48) $$\bar{d}\,(x_n, x'_m) \leq 3\epsilon K$$

où l'on a noté :

$$\epsilon = \xi'_m = \mathrm{Sup.}\,(\xi_n, \xi'_n),$$

en raison de (4.45), et

$$K = \mathrm{Sup.}\,(K_1, K_2, K_3).$$

L'inégalité précédente prouve que la distance $\bar{d}\,(x_n, x'_m)$, peut être rendue arbitrairement petite et donc que les suites de Cauchy (x'_m) et (x_n) sont équivalentes; puisqu'elles sont parfaitement quelconques il s'en suit que toutes les suites de type (2) sont équivalentes et de ce fait, il n'y a qu'une seule classe (x_0). Le résultat annoncé, au début de cet alinéa, est atteint.

L'espace métrique complet, formé par la réunion de V_3 et du point additionnel x_0, est noté $(V_3^*, \bar{d}^*)$ où $\bar{d}^*$ est définie par :

(4.49) $$\bar{d}^*(x_1, x_0) \equiv \lim_{n \to \infty} \bar{d}\,(x_1, x'_n)$$

pour tout point $x_1 \in V_3$ et pour toute suite (x'_n) de type (2).

On ne peut, à la différence du cas statique à symétrie sphérique, vu à la section précédente, exprimer d'une façon explicite, en fonction des coordonnées du point x_1, cette quantité. En effet $\bar{d}^*(x_1, x_0)$ est la valeur minimale de la suite des longueurs de toutes les géodésiques de la métrique (4.34). issues de x_1 et aboutissant à la surface $(\xi_n) \to 0$; il est clair qu'on ne sait préciser cette valeur, fort heureusement il ne nous est pas nécessaire de la connaître pour poursuivre notre étude. On posera donc simplement :

(4.50) $$\bar{d}^*(x, x_0) \equiv \sigma(r, \theta)$$

où $x \in V_3$ et a pour coordonnées (r, θ, φ) .

Ajoutons que, grâce à la formule (4.28), on peut également écrire :

$$\sigma = \sigma(\tilde{r}, \tilde{\theta})$$

4 2 2 Structure différentiable de V_3^* .

L'espace topologique métrique $(V_3^*, \bar{d}^*)$, complet par construction, peut être muni d'une structure différentiable compatible avec celle de V_3.

Pour cela il est nécessaire de définir une carte locale ($\mathcal{B}$, Φ) : $\mathcal{B}$ étant, par exemple, une boule ouverte centrée sur x_0 , de rayon b et Φ un homéomorphisme sur la boule euclidienne de centre O . Nous définissons Φ par :

$$(4.51)\ \Phi : x_0 \longrightarrow O\{0,0,0\} \ ; \ x \longrightarrow y \equiv \left\{ y' = u \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi},\ y^{2'} = u \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi},\ y^{3'} = u\cos\tilde{\varphi} \right\} .$$

Dans cette formulation : • $(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ désignent les angles polaires définis en (4.28).

• u une fonctionnelle de $s(r,\theta)$ s'annulant avec elle en x_0 et, à l'instar du cas à symétrie sphérique, telle que le déterminant $\bar{g}_{\{y\}}$ du $d\bar{s}^2$ rapporté aux coordonnées locales $\{y\}$, tende vers 1 lorsque u tend vers 0.

En anticipant un peu sur le paragraphe suivant nous écrivons l'expression $\sqrt{\bar{g}_{\{y\}}}$:

$$\sqrt{\bar{g}_{\{y\}}} = \frac{\rho^2 - 2mr}{u^2} \frac{\partial r}{\partial u} ,$$

soit encore, en raison de (4.37) (4.38) :

$$\sqrt{\bar{g}_{\{y\}}} = \frac{\rho^2 \xi^2}{u^2} \frac{\partial r}{\partial u} .$$

Compte tenu de (4.13), on voit alors, par un calcul élémentaire, que la requête

$$\bar{g}_{\{y\}} \longrightarrow 1 \qquad \text{pour} \qquad u \longrightarrow 0$$

conduit à la relation d'équivalence suivante, entre les infiniments petits u et ξ (4.37) :

$$(4.51\ \text{bis})\qquad u \sim \xi^4 .$$

Le comportement de u , pour les points de V_3 proches de l'origine x_0 , se trouve ainsi précisé.

4 3. - Singularité de la métrique et du champ gravitationnel

4 3 1 Métrique

On utilise dans le voisinage de l'origine x_0 le système de coordonnées (u, θ, φ). La métrique d'espace s'écrit alors :

$$(4.52)\ ds^2 = \frac{\rho^2 - 2mr}{\Delta^2} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial \theta} du\, d\theta + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \Delta^2 \right] d\theta^2 \right\} + \Delta^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

où r est défini comme fonction de u et θ par inversion de la fonction u :

$$u = u(r, \theta) \iff r = r(u, \theta).$$

De cette expression de la métrique on déduit celle de la cobase orthonormée:

$$(4.53)\quad \begin{cases} \omega^1 = \dfrac{(\rho^2 - 2mr)^{1/2}}{\Delta} \left(\dfrac{\partial r}{\partial u}\, du + \dfrac{\partial r}{\partial \theta}\, d\theta \right) \\ \omega^2 = (\rho^2 - 2mr)^{1/2}\, d\theta \quad , \qquad \omega^3 = \Delta \sin\theta\, d\varphi . \end{cases}$$

Les composantes du tenseur de Riemann, non identiquement nulles, rapportées à cette cobase, s'écrivent comme suit :

$$(4.54)\quad \begin{cases} \bar{R}_{1212} = -m^2 \dfrac{r^2 + a^2 - 2mr + a^2 \sin^2\theta}{(\rho^2 - 2mr)^3} , \\ \bar{R}_{2323} = m^2 \dfrac{\Delta^2}{(\rho^2 - 2mr)^3} , \\ \bar{R}_{2121} = -m^2 \dfrac{1}{(\rho^2 - 2mr)^3} . \end{cases}$$

On constate qu'elles sont singulières pour $\rho^2 - 2mr = \rho^2 \xi_1^2 = 0$, c'est à dire au point $\mathcal{X}_0$.

4 3 2 Champ de gravitation.

On considère maintenant le champ gravitationnel $(\vec{E}, \vec{B})$, défini en (1.19), à partir des quantités ξ_1^2 et Φ_i (4.30).

Dans le cas présent nous avons :

$$(4.55)\quad \xi_1^2 = 1 - \frac{2mr}{\rho^2}$$

et

$$\Phi_2 = \frac{2mra\sin\theta}{\rho^2 \Delta \xi_1^2} \quad , \qquad \Phi_1 = \Phi_3 = 0 .$$

On en déduit, suivant (1.19), les expressions de E_{ij} et B_{ij} :

$$(4.56)\quad \begin{cases} E_{11} = \dfrac{mr\Delta(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^5 \xi_1^3} \\ E_{22} = \dfrac{2mra^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^5 \xi_1^3} \\ E_{33} = 0 \quad ; \end{cases}$$

$$(4.57)\qquad \begin{cases} B_{12} = -\dfrac{4ma\,r\,\Delta\cos\theta}{\rho^5\,\xi^3} \\ B_{21} = -\dfrac{2ma\sin\theta\,(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^5\,\xi^3} \\ B_{11} \equiv 0 \end{cases}$$

Indiquons aussi les composantes du vecteur conservatif $\vec{h}$, défini en (1.25) :

$$(4.58)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{m(r^2+a^2)(r^2 - a^2\cos^2\theta)}{\rho^5\,\xi\,\Delta} \\ h_2 = -\dfrac{2mr\,a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^5\,\xi} \\ h_3 \equiv 0 \end{cases}$$

Ces composantes, toutes rapportées au corepère (4.53), sont singulières pour $\xi = 0$ c'est à dire en $\mathcal{X}_0$.

A l'issue de ces deux alinéas, il apparaît donc que le point $\mathcal{X}_0$ est singulier et pour la structure riemannienne et pour le champ de gravitation.

4 4. - Sources de la solution de Kerr

4 4 1 Caractérisation des sources.

Nous allons caractériser les sources du champ de Kerr en employant une méthode identique, dans son principe, à celle qui fut mise en oeuvre précédemment dans le cas de la symétrie sphérique. Rappelons qu'elle consiste pratiquement dans la détermination, au sens de la théorie des distributions mathématiques, de l'écriture de certaines des équations du champ - précisément $R^0_0 = 0$ et $R^i_0 = 0$ - les expressions mathématiques figurant alors au second membre de chacune d'elles, étant interprétées comme caractéristiques des sources de la solution considérée, Kerr en l'occurence.

Les équations, qu'il nous faut étudier, sont :

$$(4.59)\qquad \nabla_i\, h^i = 0$$

$$(4.60)\qquad \nabla_i\left(\xi^3 B^{ij}\right) = 0$$

Nous allons les traiter successivement dans les deux alinéas suivants.

4 4 2 Aspect massif des sources.

On va appliquer, pour le mettre en évidence, la formule déjà maintes fois utilisée (3.24) (3.38) :

$$(4.61) \quad \langle \nabla_i h^i , f \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_2(\epsilon)} h^i f \, d\sigma_i \quad , \quad f \in \mathcal{D}^\circ(\nabla_i^*);$$

la surface d'intégration $S_2(\epsilon)$ est une surface équipotentielle, telle que :

$$- g_{00}(u,\theta) = \epsilon^2 \ .$$

Explicitons les éléments mathématiques entrant dans le calcul de l'intégrale précédente.

. l'équation de la surface $S_2(\epsilon)$:

$$(4.62) \quad r(u,\theta) = \frac{m}{1-\epsilon^2} + \sqrt{\left(\frac{m}{1-\epsilon^2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta}$$

. la métrique induite sur cette surface par $d\tilde{s}^2$ (4.34):

$$(4.63) \quad ds^2 = \frac{\epsilon^2 \rho^2}{\Delta^2} Q^2 d\theta^2 + \Delta^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 ,$$

on a posé :

$$Q^2 = \Delta^2 + \frac{4 r^2 a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(r^2 - a^2\cos^2\theta)^2} \ ;$$

(la déduction de cette métrique a été donnée à l'alinéa 4 2 1)

$$(4.64) \quad \sqrt{g} = \epsilon \rho Q \sin\theta$$

. les composantes de la normale unitaire à $S_2(\epsilon)$

$$(4.65) \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\Delta}{Q} \\ N_2 = - \dfrac{2 r a^2 \sin\theta\cos\theta}{(r^2 - a^2\cos^2\theta) Q} \\ N_3 = 0 \ . \end{cases}$$

On utilise ces expressions, celles des composantes de h^i notées en (4.58), pour écrire le second membre de (4.61); on obtient :

$$(4.66) \quad \langle \nabla_i h^i , f \rangle = - \lim_{\epsilon \to 0} m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\rho^4} \left[(r^2 + a^2)(r^2 - a^2\cos^2\theta) + \frac{4 r^2 a^4 \sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta} \right] f(u,\alpha,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Pour mener à bien le calcul de cette dernière intégrale on doit substituer à r son expression (4.62) et à $f(u,\theta,\varphi)$ son développement autour de l'origine x_o :

$$(4.67) \qquad f(u,\theta,\varphi) = f(x_o) + u\,(\partial_u f)(x_o) + u^2 R(f) .$$

En raison de (4.51bis) on a, pour $\frac{1}{r} = \epsilon \longrightarrow 0$:

$$u = \lambda(\theta)\,\epsilon^{\frac{1}{3}} + \cdots\cdots (\text{termes d'ordre supérieur en } \epsilon)$$

où $\lambda(\theta)$ est une fonction régulière de θ , déductible des considérations de la fin de l'alinéa 4 4 2 dont l'explicitation n'est pas utile à la suite du raisonnement. Une fois effectuées les substitutions mentionnées ci-dessus, on obtient

$$(4.68) \quad \langle \nabla_i h^i , f \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ 1 + \frac{k^2}{2} \left[\frac{1 - 3\cos^2\theta}{1 + \sqrt{1 - k^2\cos^2\theta}} + \frac{k^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\theta}\,\left(1 + \sqrt{1 - k^2\cos^2\theta}\right)} \right] \right\} \left[f(x_o) + u(\epsilon)(\partial_u f)(x_o) + u^2 R(f) \right] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi ,$$

on a posé $k = \frac{a}{m}(1 - \epsilon^4)$

L'intégration s'effectue simplement, en remarquant qu'après une intégration par parties du troisième terme sous le signe somme, les expressions autres que le premier terme, ou sont nulles, ou se détruisent mutuellement.

Finalement on arrive au résultat suivant :

$$(4.69) \quad \underline{\langle \nabla_i h^i , f \rangle = -4\pi m f(x_o) \iff \nabla_i h^i = -4\pi m\, \delta_{x_o} .}$$

On a ainsi une première caractérisation des sources du champ de Kerr. Elle montre qu'il s'agit d'une source ponctuelle, localisée au point x_o et proportionnelle à la distribution de Dirac.

La présence de la constante m est significative de l'aspect massif de la source.

4 4 2 Aspect de spin.

Il nous faut maintenant considérer la seconde équation de conservation (4.60) et l'exprimer aussi au sens de la théorie des distributions.

Pour parvenir à cette fin on est conduit à avoir recours à un tenseur-distribution mixte, une fois covariant, une fois contravariant $B^i{}_j$ dont la définition sur V_3 est la suivante :

$$(4.70) \quad \langle B^i{}_j , \Phi^j_i \rangle = \int_{V_3^*} B^i{}_j \, \Phi^j_i \, \bar{\eta}$$

où Φ_{ij} , $B^{i}{}_{j}$ sont rapportées à $[e_i]$ et $[\omega^i]$, repères et corepères duaux, quelconques pour le moment; $\Phi_{ij} \in \mathcal{D}'_1(V_3^*)$ et $\bar{\eta}$ est l'élément de volume de V_3^*.

Notons que les composantes $B^{i}{}_{j}$, données en (4.58), étant des fonctions localement sommables, elles permettent de définir des distributions.

Ecrivons maintenant la définition de (4.60) comme distribution :

$$< \bar{\nabla}_i (\xi^3 B^{i}{}_{j}) , \Phi^{j} > = - < \xi^3 B^{i}{}_{j} , \bar{\nabla}_i \Phi^{j} > \qquad , \quad \Phi^{j} \in \mathcal{D}'(V_3^*)$$

soit explicitement :

$$(4.71) < \bar{\nabla}_i (\xi^3 B^{i}{}_{j}) , \Phi^{j} > = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V_3^* - B(\epsilon)} \xi^3 B^{i}{}_{j} \bar{\nabla}_i \Phi^{j} \, \bar{\eta}$$

où $B(\epsilon)$ est la boule de V_3^* de centre x_0 et de rayon ϵ .

Cette expression peut être écrite encore de la façon équivalente suivante :

$$< \bar{\nabla}_i (\xi^3 B^{i}{}_{j}) \, \Phi^{j} > = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{V_3^* - B(\epsilon)} \left[\bar{\nabla}_i (\xi^3 B^{i}{}_{j} \Phi^{j}) - \Phi^{j} \nabla_i (\xi^3 B^{i}{}_{j}) \right] \bar{\eta} \, .$$

Eu égard à (4.60) la contribution du second terme sous le signe somme est nul; par l'application du théorème de Stokes au terme restant on passe à l'intégrale de surface suivante :

$$< \bar{\nabla}_i (\xi^3 B^{i}{}_{j}) , \Phi^{j} > = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_i(\epsilon)} \xi^3 B^{i}{}_{j} \, \Phi^{j}(x) \, d\sigma_i \qquad , \quad S_i(\epsilon) = \partial B(\epsilon).$$

Nous nous proposons d'appliquer cette formule à la solution de Kerr selon des modalités qu'il importe de préciser au mieux. Nous le faisons à la suite :

a) Repère et corepère. Les repères et corepères (4.53) duaux et orthonormés déduits de (3.20) s'avèrent insatisfaisants pour le calcul envisagé car les champs de vecteurs (ou de covecteurs) qui les engendrent n'ont aucune direction privilégiée. Il faut ici recourir à des champs de vecteurs qui présentent des directions constantes, asymptotiquement au moins; les repères et les corepères duaux $[e_{i'}]$ $[dy^{i'}]$ déduits des coordonnées $y^{i'}$ (4.51) conviennent.

b) La surface $S_i(\epsilon)$ est la même que précédemment; son équation est notée en (4.62). Et, suivant une remarque déjà faite, u et ϵ tendent ensemble vers 0.

c) Les fonctions $\Phi^{i'}$ sont par hypothèse indéfiniment dérivables et à supports compacts. Elles sont développables autour de l'origine x_0 où $u = 0$; on a les expressions :

$$(4.73)\quad \begin{cases} \Phi^{1'}(x) = \Phi^{1'}(x_0) + u\left[\partial_1 \Phi^{1'} \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi} + \partial_2 \Phi^{1'} \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi} + \partial_3 \Phi^{1'}\cos\tilde{\theta}\right]_{(x_0)} + u^2 R(\Phi^{1'}) \\ \Phi^{2'}(x) = \Phi^{2'}(x_0) + u\left[\partial_1 \Phi^{2'} \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi} + \partial_2 \Phi^{2'} \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi} + \partial_3 \Phi^{2'}\cos\tilde{\theta}\right]_{(x_0)} + u^2 R(\Phi^{2'}). \end{cases}$$

On a posé : $\partial_{i'} \Phi^{j'} \equiv \dfrac{\partial \Phi^{j'}}{\partial y^{i'}}$.

Compte tenu de l'expression (4.57) de B_{ij} , des données mathématiques notées en (4.62) (4.64) (4.65) et enfin de (4.28) on a les éléments nécessaires à la transcription de (4.72); elle donne :

$$\langle \nabla_i(\xi^3 B^i_j)\ , \Phi^j \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2ma\left[\sin\varphi\,\Phi^{1'}(x) - \cos\varphi\,\Phi^{2'}(x)\right]}{(r^2 - a^2\cos^2\theta)\,u\sin\tilde{\theta}}\,\Delta^2 \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

Puis on substitue, dans l'intégrand, à $\Phi^{1'}(x)$ et $\Phi^{2'}(x)$ leurs développements respectifs (4.73) ; afin de ne point alourdir à l'excès l'écriture, on note l'expression obtenue ainsi en omettant les termes qui, manifestement, n'apportent aucune contribution à l'intégrale :

$$(4.74)\quad \langle \nabla_i(\xi^3 B^i_j),\ \Phi^j \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2ma\ \Delta^2 \sin^3\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta} \times$$

$$\times \Bigg\{ \underbrace{\frac{\sin\varphi\,\Phi^{1'}(x_0) - \cos\varphi\,\Phi^{2'}(x_0)}{u\sin\tilde{\theta}}}_{(1)} + \underbrace{\left[\left(\partial_2 \Phi^{1'}\right)_{(x_0)}\sin^2\varphi - \left(\partial_1 \Phi^{2'}\right)_{(x_0)}\cos^2\varphi\right]}_{(2)} \Bigg\}\, d\theta\, d\varphi .$$

L'expression à intégrer se compose de deux termes :

a) Le premier, manifestement nul par l'intégration sur φ pour tout $u \neq 0$ devient une forme $\frac{0}{0}$ pour $u = 0$; il est correct d'admettre par continuité un résultat nul pour la limite $u \to 0$.

b) Le second, après intégration sur φ , s'écrit :

$$(4.75)\quad (2) : -2\pi\, ma\left[\left(\partial_2 \Phi^{1'}\right)_{(x_0)} - \left(\partial_1 \Phi^{2'}\right)_{(x_0)}\right] \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{\pi} \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta}\, d\theta \ .$$

Compte tenu de l'expression de $\tau(\theta,\epsilon)$ (4.62), on calcule l'intégrale ci-dessus, sa valeur notée $\Gamma\left(\frac{m}{a}\right)$ est la suivante :

$$(4.76)\quad \Gamma\left(\frac{m}{a}\right) = 1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} - \frac{m}{a}\left(\pi - 2\,\mathrm{Arc}\cos\frac{a}{m} - 2\,\frac{a}{m}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc}\cos\frac{a}{m} - \frac{a}{m}\sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} - \frac{2}{3}\,\frac{a^3}{m^3}\right]\left(\frac{m}{a}\right)^3 .$$

Rassemblant les résultats partiels (4.75) (4.76) on arrive au résultat final

suivant : $$\langle \nabla_i(\xi^j B^i{}_j), \Phi^j \rangle = -2\pi m a F\left(\frac{m}{a}\right)\left[(\partial_{3'}\Phi^{1'})(x_0) - (\partial_{1'}\Phi^{3'})(x_0)\right] .$$

(4.77)

Ceci est la seconde caractérisation de la source du champ de Kerr. Elle confirme son caractère ponctuel et sa localisation en x_0 . La distribution obtenue met en évidence, nous semble-t-il, un moment de rotation intrinsèque de cette source dirigé suivant l'axe des $y^{3'}$.

Une justification de cette dernière considération peut être présentée en faisant apparaître l'analogie de la formule (4.77) et d'un résultat déduit de l'électromagnétisme significatif de l'interprétation donnée.

Considérons un circuit circulaire de rayon a parcouru par un courant électrique d'intensité i ; le dipole magnétique est le système limite obtenu lorsque le rayon a tend vers zéro de telle façon que la quantité $\mathcal{M} = \pi a^2 i$, appelée moment dipolaire magnétique, demeure finie. L'induction magnétique $\vec{\mathcal{B}}$, déduite de celle de la spire, par passage à la limite $a \longrightarrow 0$, a pour composantes, dans un système de coordonnées polaires

(4.78) $\mathcal{B}^1 = 2\mathcal{M}\,\frac{\cos\theta}{r^3}$, $\mathcal{B}^2 = -\mathcal{M}\,\frac{\sin\theta}{r^4}$, $\mathcal{B}^3 = 0$.

Elle satisfait à l'équation du champ :

(4.79) $\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{B}} = 0 \iff \nabla_i \mathcal{B}^{ij} = 0$

où $\mathcal{B}_{ij}$ est le tenseur dual du vecteur induction $\mathcal{B}^i$.

Cette dernière équation peut être écrite au sens de la théorie des distributions et l'on obtient, après quelques calculs élémentaires :

(4.80) $\langle \nabla_i \mathcal{B}^i{}_j \, , \, \Phi^j \rangle = \frac{2}{3}\pi\mathcal{M}\left[(\partial_{2'}\Phi_{1'})(x_0) - (\partial_{1'}\Phi_{2'})(x_0)\right]$

dans cette expression les indices primés $1'$, $2'$, $3'$ sont relatifs aux coordonnées cartésiennes x , y , z liées à r , θ , φ par les formules habituelles.

Comme ici l'espace est euclidien la position des indices de $\Phi_{i'}$, dans le second membre de (4.80), devient indifférente.

Il découle de ces explications que les grandeurs gravitationnelle $\vec{B}$ et électromagnétique $\vec{\mathcal{B}}$ apparaissent comme formellement analogues, les équations de champ (4.60) et (4.79) pouvant être rapprochées, de même les relations (4.77) et (4.80) présentent des formes similaires. On est ainsi conduit, par voie de conséquence, à envisager la quantité $m a F\left(\frac{m}{a}\right)$ comme l'analogue gravitationnel du moment dipolaire magnétique $\mathcal{M}$ et à la nommer, de ce fait, " <u>moment dipolaire</u>

gravitationnel de rotation " .

(Ajoutons que cette conclusion pourrait aussi être tirée en comparant (3.40) avec un résultat indiqué dans le livre cité de L. Schwartz p. 336).

APPENDICE

ESPACES METRIQUES

a. Définition. Un espace métrique est un ensemble E muni d'une application d, appelée distance, de $E \times E$ dans la demi-droite R_+ jouissant des propriétés suivantes :

$$(A\,1)\quad \begin{cases} (1)\ \text{positivité :} & d(x_1, x_2) > 0 \ \text{si}\ x_1 \neq x_2 \ \text{et}\ d(x,x) = 0, \\ (2)\ \text{symétrie :} & d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) \\ (3)\ \text{inégalité du triangle :} & d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3). \end{cases}$$

b. Topologie d'un espace métrique. On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r fini > 0, l'ensemble des points $x \in E$ tels que $d(x_0, x) < r$. Un voisinage de x_0 est une partie de E contenant au moins une boule ouverte de centre x_0 et de rayon $r > 0$. L'ensemble E muni de la notion de voisinage ci-dessus devient un espace topologique noté (E, d).

c. Espace complet. Une suite de points (x_n) d'un espace métrique E est dite convergente s'il existe un point $x \in E$, appelé point limite, tel que :

$$(A\,2)\qquad \lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Une suite de points (x_n) est par définition une suite de Cauchy si :

$$(A\,3)\qquad \lim_{n \text{ et } m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

On dit qu'un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

d. Complétion d'un espace métrique.

Théorème - Pour tout espace métrique (E, d) incomplet, il existe un espace métrique complet (E^*, d^*) tel que E soit isométrique à un sous-espace S partout dense dans E^* ; de plus, l'espace E^* est déterminé à une isométrie près.

On dit que (E^*, d^*) est le complété de (E, d), et l'on peut identifier E au sous-espace S.

Esquissons la construction de (E^*, d^*). Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de Cauchy de (E, d) ; deux éléments (x_n) et (x'_n) de $\mathcal{E}$ sont dits équivalents, $(x_n) \mathcal{R} (x'_n)$ si :

(A 4) $$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x'_n) = 0 \ ,$$

alors E^* est l'ensemble quotient de $\mathcal{E}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Soient $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2 \in E^*$ deux classes d'équivalence, (x_{1n}) et (x_{2n}) deux suites de Cauchy quelconques représentatives de ces classes, la limite

(A 5) $$d^*(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \equiv \lim_{n \to \infty} d(x_{1n}, x_{2n})$$

ne dépend que des classes d'équivalence correspondantes; elle définit la distance d^* .

e. Espaces métriques associés aux variétés proprement riemanniennes.

Soit (V_n, g) une variété riemannienne connexe différentiable de métrique définie positive :

(A 6) $$ds^2 = g_{ij}(x^k)\, dx^i dx^j \qquad (i, j \cdots = 1, 2, \cdots, n);$$

V_n peut être munie d'une distance d définie par la formule :

(A 7) $$d(x_1, x_2) = \text{Inf.} \int_{\ell(x_1, x_2)} ds$$

$\ell(x_1, x_2)$ étant l'ensemble de tous les chemins, différentiables par morceaux, qui joignent les points x_1 et x_2 . On sait que la topologie de (V_n, d) est équivalente à celle de V_n, c'est à dire à celle pour laquelle la métrique g était différentiable.

L. Schwartz " Cours d'analyse " Herman (1970).

Kolayashi et Nomizu " Foundations of differential geometry " Interscience (1969).

B I B L I O G R A P H I E

1 K. SCHWARZSCHILD . Sitzler Preuss Akad. Wiss. Physik Math. Kl. 189 (1916).

2 M.A. TONNELAT . " Les vérifications expérimentales de la Relativité générale " Ed. Masson et Cie (1964).

3 J. ELHERS . Contribution au livre " Relativity, Astrophysics and Cosmology " Ed. by W. Israel (1973).

4 G. LEMAITRE . Ann. Soc. Scient. Bruxelles, Série A 53, 51 (1933).

5 D. FINKELSTEIN . Phys. Rev. 110, 965 (1958).

6 M.D. KRUSKAL . Phys. Rev. 119, 1743 (1960).

7 B. CARTER . Phys. Rev. 174, 1559 (1968).

8 R.P. KERR . Phys. Rev. Letters 11, 257 (1965).

9 S. MAVRIDES . " L'univers relativiste " Masson (1973).

10 W. ISRAEL . Phys. Rev. 164, 1776 (1967).

11 A.G. DOROSHKEVICH, Ya. B. ZEL'DOVICH et I.D. NOVIKOW . Soviet Physics J.E.T.P. 22 (1966).

12 A.I. JANIS, E.T. NEWMAN et J. WINICOUR . Phys. Rev. Letters 20, 878 (1968).

13 F.I. COOPERSTOCK et G. JUNEVICUS . Il Nuovo Cimento 16 B, 387 (1973).

14 L. BEL . J. Math. Phys. 10, 1501 (1969)
G.R.G. 1 , 337 (1971).

15 A. LICHNEROWICZ . " Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme " Masson (1955).

16 B. LEAUTE . Ann. I.H.P. 8, 93 (1968).

17 V. FOCK . Contribution au livre " Recent Developments in G.R. " Pergamon Press (1963) " The Theory of Sp. Time and Grav. " 2ème ed. Pergamon (1964).

18 J. ELHERS et W. KUNDT . dans " Gravitation " Ed. by L. Witten, John Wiley et Sons (1962).

19 L. BEL et J.G. ESCARD . Acc. Naz. dei Lincei Ser VIII, XLI , p. 476 (1966).

20 B. CATTANEO . Nuovo Cimento Série X 10 (1958).

21 Y. THIRY . Journal Math. pures et appliquées 30 (1951).

22 R.H. DICKE . Phys. Rev. 125, 2163 (1962).

23 C.H. BRANS . Phys. Rev. 125, 2194 (1962).

24 H. REISSNER . Ann. Phys. 50, 106 (1916).

25 E.T. NEWMAN, J. UNTI et L. TAMBURINO . Journ. Math. Phys. 4, 915 (1963).

26 C.W. MISNER . Journ. Math. Phys. 4, 924 (1963).

27 L. SCHWARTZ . " Théorie des distributions " Ed. Herman (1966).

28 A.H. TAUB . Ann. of Math. 53, 472 (1951).

29 M. DEMIANSKI et E.T. NEWMAN . Bull. Ac. Polonaise Sc. 14, 653 (1966).

30 R.P. KERR et A. SCHILD IV Cent. di Galileo Galilée (1964).

31 L. BEL . Cahiers de Physique 138, 59 (1962).

32 A. PAPAPETROU et A. HAMOUI . Ann. I.H.P. IX , 178 (1968).

33 S.W. HAWKING et G.F.R. ELLIS . " The Large Scale Structure of Space-Time " Cambridge University Press (1973).

34 A. PAPAPETROU . Ann. I.H.P. 4, 83 (1966).

C H A P I T R E III

ETUDE DU SCHEMA MATIERE PURE ISOTROPE

S O M M A I R E

	pages
Introduction	III - 1
Notations	3
I. - REMARQUES LIMINAIRES	4
11. - Equations de conservation	4
12. - Champs de vecteurs $\hat{l}_\alpha$ sans distorsion	5
II. - EQUATIONS DU CHAMP	6
21. - Système de coordonnées - Repères	6
22. - Expression des projections du second membre des équations du champ	7
23. - Ecriture des équations du champ	8
III. - RESOLUTION DES EQUATIONS DU CHAMP - CAS GENERAL $\hat{\sigma} \neq 0$	11
31. - Caractérisation des solutions recherchées	11
32. - Résolution des équations radiales	12
33. - Expression de la solution	13
34. - Données initiales	19
IV. - RESOLUTION DES EQUATIONS DU CHAMP DANS LE CAS PARTICULIER $\hat{\sigma} = 0$	20
41. - Analyse des conséquences de la condition supplémentaire $\hat{\sigma} = 0$	20
42. - Données initiales dans le cas $\hat{\sigma} = 0$	24
V. - EXPRESSION DES GRANDEURS PHYSIQUES CARACTERISTIQUES DES FLUX EMIS	25
51. - Analyse qualitative de la situation physique	25
52. - Energie-impulsion	26
53. - Moment cinétique	29
VI. - PSEUDO-TENSEUR ENERGIE-IMPULSION ET METRIQUE DE KERR-SCHILD ..	30
61. - Rappel de l'expression du pseudo-tenseur de Landau et Lifshitz	30

62. - Expression de $t^{\alpha\beta}$ pour une métrique du
type Kerr-Schild 33
63. - Quelques exemples où $t^{\alpha\beta} = 0$ 36

Références ..... III - 41

INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre on considère le système des équations d'Einstein descriptif du schéma matière pure isotrope :

$$(1) \qquad R_{\alpha\beta} = -2\Phi\, \ell_\alpha \ell_\beta \qquad \text{avec} \qquad g^{\alpha\beta}\, \hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\beta = 0$$

et l'on se propose, tout d'abord, de préciser la forme des solutions déterminant des espaces-temps à comportement asymptotiquement minkowskien. Pour parvenir à ce résultat nous aurons recours, tout naturellement, à la méthode de Newman, Penrose, Unti [1] [2] . A l'instar de ces auteurs nous utiliserons un système de coordonnées ($x^0 = u$, $x^1 = r$, x^A) et un champ de repères pseudo-orthonormés (ℓ_α , n_α , m_α , $\bar{m}_\alpha$) associés à une famille d'hypersurfaces caractéristiques de telle façon que, d'une part, u soit un repérage de ces hypersurfaces, r un paramètre affine des bicaractéristiques et, d'autre part :

$$(2) \qquad \ell_\alpha = \partial_\alpha u \equiv \delta^0_\alpha \ .$$

Le développement des raisonnements fera apparaître que deux cas doivent être distingués suivant que le champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$ est, ou non, pourvu de distorsion. On verra en effet, au terme de l'étude du système complet des équations de champ, qu'il ne reste plus aucune fonction arbitraire de nature purement gravitationnelle dans le cas particulier $\hat{\sigma} = 0$, tandis que, dans le cas général $\hat{\sigma} \neq 0$, la fonction $\sigma^0(u, x^A)$, partie principale de la distorsion σ du champ ℓ_α , n'est régie par aucune équation. Dans chacun de ces cas nous donnerons le tableau des développements asymptotiques des fonctions de champ caractéristiques des solutions du système (1).

Ensuite une évaluation de l'énergie-impulsion totale émise par le système dans une transition entre deux états stationnaires $u = u_1$, $u = u_2$ (avec $u_2 > u_1$), sera déterminée sous une forme additive commodément interprétable, permettant de confirmer la validité de la formule de Bondi [3] et Sachs [4] afférente à l'énergie du seul rayonnement gravitationnel.

Nous évaluerons aussi, dans les mêmes conditions, le moment cinétique total émis par le système; nous verrons que l'expression obtenue ne comporte de termes relatifs au courant de matière isotrope que si le champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$, qui l'engendre, ne se réduit pas à un champ de gradients.

Nous discuterons ensuite des conditions de validité des deux expressions précédemment obtenues et, en particulier, des difficultés inhérentes au cas $\hat{\sigma} = 0$.

Dans le dernière section de ce chapitre nous tenterons de compléter et de concrétiser notre analyse dans le cas particulier $\hat{\sigma} = 0$ en nous intéressant aux métriques de la classe de Kerr-Schild [14], c'est à dire de la forme :

$$(3) \qquad g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + 2H k_\alpha k_\beta \qquad \text{avec} \qquad \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 \ .$$

Nous montrerons que le pseudo-tenseur énergie-impulsion du champ de gravitation, construit à partir de toute solution de ce type des équations (1.1) ($\rightarrow \ell = k$) est nul; comme de plus, lorsque $\hat{\sigma} = 0$, les espaces-temps V_4 munis d'une métrique de la forme (3) sont à comportement asymptotiquement minkowskien il s'en suit qu'ils ne peuvent être radiatifs. Pour illustrer ce résultat, nous mentionnerons deux solutions explicites de la classe de Kerr-Schild, obtenues par Patel et Vaidya [17] [18].

NOTATIONS (1)

Dans ce chapitre nous utiliserons la signature (+ , - , - , -). Nous introduirons des champs de repères pseudo-orthonormés (ℓ , m , $\bar{m}$, $\bar{\bar{m}}$) satisfaisant à :

$$\ell \cdot m = - m \cdot \bar{\bar{m}} = 1$$

$$\ell^2 = \bar{\bar{m}}^2 = \bar{m}^2 = \ell \cdot \bar{m} = m \cdot \bar{m} = 0 .$$

Les coefficients de spin associés sont notés :

$$\kappa = \ell_{\mu;\nu} m^\mu \ell^\nu \qquad \nu = - n_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu n^\nu$$

$$\rho = \ell_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu \qquad \mu = - n_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu m^\nu$$

$$\sigma = \ell_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu \qquad \lambda = - n_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu \bar{\bar{m}}^\nu$$

$$\tau = \ell_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu \qquad \pi = - n_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu \ell^\nu$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \left(\ell_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu \bar{m}^\nu \right)$$

$$\beta = \tfrac{1}{2} \left(\ell_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu m^\nu \right)$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2} \left(\ell_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{\bar{m}}^\mu n^\nu \right)$$

$$\epsilon = \tfrac{1}{2} \left(\ell_{\mu;\nu} n^\mu \ell^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \ell^\nu \right) .$$

Les projections des composantes du tenseur de Weyl sont notées :

$$\Psi_0 = - C_{\mu\nu\rho\sigma} \ell^\mu m^\nu \ell^\rho m^\sigma$$

$$\Psi_1 = - C_{\mu\nu\rho\sigma} \ell^\mu n^\nu \ell^\rho m^\sigma$$

$$\Psi_2 = - \tfrac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma} \left(\ell^\mu m^\nu \ell^\rho n^\sigma + \ell^\mu n^\nu m^\rho \bar{m}^\sigma \right)$$

$$\Psi_3 = - C_{\mu\nu\rho\sigma} \ell^\mu n^\nu \bar{m}^\rho n^\sigma$$

$$\Psi_4 = - C_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\rho \bar{m}^\sigma .$$

Les opérateurs de dérivation " directionnelle ", suivant $\ell, m, \bar{m}, \bar{\bar{m}}$ sont notés :

$$D\Phi \equiv \Phi_{;\mu} \ell^\mu \qquad \Delta\Phi \equiv \Phi_{;\mu} n^\mu$$

$$\delta\Phi \equiv \Phi_{;\mu} m^\mu \qquad \bar{\delta}\Phi \equiv \Phi_{;\mu} \bar{m}^\mu .$$

Ces notations, identiques à celles de Newman-Penrose, seront constamment employées au cours de cette étude.

I. REMARQUES LIMINAIRES

1. - Equations de conservation.

Les solutions particulières, que nous voulons étudier, satisfont le système des équations d'Einstein relatif à un schéma matière pure isotrope :

$$R_{\alpha\beta} = -2\Phi \hat{l}_\alpha \hat{l}_\beta \qquad (1.1)$$

où Φ désigne une fonction suffisamment différentiable des coordonnées (x^α) et $\hat{l}_\alpha$ un champ de vecteurs isotropes. Ces quantités peuvent être caractérisées plus précisément à l'aide des relations de conservation satisfaites par le second membre de (1.1). En les écrivant :

$$(\Phi \hat{l}^\alpha \hat{l}^\beta)_{;\alpha} = \Phi_{,\alpha} \hat{l}^\alpha \hat{l}^\beta + \Phi (\hat{l}^\alpha{}_{;\alpha} \hat{l}^\beta + \hat{l}^\beta{}_{;\alpha} \hat{l}^\alpha) = 0, \qquad (1.2)$$

on constate que la congruence des trajectoires de $\hat{l}_\alpha$ est géodésique. Une courbe géodésique pouvant toujours être rapportée à un paramètre affine, il en résulte que les relations (1.2) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$(\Phi \hat{l}^\alpha)_{;\alpha} = 0, \qquad (1.3)$$

$$\hat{l}^\beta{}_{;\alpha} \hat{l}^\alpha = 0. \qquad (1.4)$$

Il y a lieu de préciser que la généralité du système (1.1) ne se trouve en rien affectée quelque soit le paramétrage choisi pour les trajectoires de $\hat{l}_\alpha$.

Définissons un champ de repères pseudo-orthonormés adapté à $\hat{l}_\alpha$, en lui adjoignant trois autres champs de vecteurs isotropes : l'un réel $\hat{n}_\alpha$, les deux autres complexes conjugués $\hat{m}_\alpha$ et $\bar{\hat{m}}_\alpha$, satisfaisant les relations classiques :

$$\hat{l}^\alpha \hat{n}_\alpha = -\hat{m}^\alpha \bar{\hat{m}}_\alpha = 1 \quad , \quad \hat{l}^\alpha \hat{m}_\alpha = \hat{n}^\alpha \hat{m}_\alpha = 0. \qquad (1.5)$$

Nous référant ensuite aux notations de Newman-Penrose[1] nous pourons écrire les équations (1.3) (1.4), en termes d'opérateurs et de coefficients de rotation afférents à $(\hat{l}_\alpha, \hat{n}_\alpha, \hat{m}_\alpha, \bar{\hat{m}}_\alpha)$, comme suit :

$$\hat{D}\Phi = (\hat{\rho} + \bar{\hat{\rho}})\Phi, \qquad (1.6)$$

$$\hat{\kappa} = 0, \qquad (1.7)$$

$$\hat{\epsilon} + \bar{\hat{\epsilon}} = 0. \qquad (1.8)$$

(1) rappelées à la page III-2.

Dans la suite de ce mémoire nous adjoindrons aux équations de champ (1.1) certaines hypothèses restrictives portant sur la structure de l'espace-temps, sur les caractéristiques du champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$ .... Considérons déjà l'une d'elles.

1 2. - Le champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$ est sans distorsion.

Etudions les conséquences de cette supposition.

Les équations (1.1), régissant le schéma physique envisagé, sont fort proches de celles du vide; en effet, une seule des projections du second membre de (1.1) sur le repère $(\hat{\ell}, \hat{m}, \bar{\hat{m}})$ déjà introduit, n'est pas nulle; il s'agit de :

(1.9) $$\hat{\Phi}_{22} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \hat{m}^\alpha \bar{\hat{m}}^\beta = \Phi \quad .$$

Cette circonstance fait que le théorème de Goldberg-Sachs [5] , démontré initialement lorsque les équations d'Einstein du vide sont satisfaites, vaut encore pour le cas intérieur décrit par (1.1). Pour s'en convaincre il suffit, par exemple, de reprendre la démonstration donnée par Newman et Penrose dans [1] (pour $R_{\mu\nu} = 0$) et d'observer qu'elle demeure entièrement valable dans le cas présent (1.1). Ainsi, et c'est la conclusion du théorème, le champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$, isotropes, à trajectoires géodésiques sans distorsion est un champ de vecteurs principaux du tenseur de Weyl. En particulier, donc, celui-ci ne peut être du type I de la classification de Bel-Petrov [6] ; ce qui se traduit par les relations suivantes :

(1.10) $$\hat{\Psi}_0 = \hat{\Psi}_1 = 0 \quad .$$

La réciproque est également valable - c'est le théorème de Lichnerowicz-Bel-Robinson [6] - on le constaterait sans difficulté aucune en se reportant de nouveau à l'étude précitée [1] de N-P. Elle dit que si $\hat{\ell}_\alpha$ est un champ de vecteurs principaux du tenseur de Weyl (1.10) alors ses trajectoires sont des géodésiques isotropes sans distorsion.

En conclusion de ce paragraphe on retiendra donc que, compte tenu des équations (1.1), il y a équivalence entre les deux hypothèses suivantes :

(a) - L'espace-temps considéré est de type algébriquement spécial c'est-à-dire que le tenseur de Weyl est d'un type autre que I de la classification de Bel-Petrov avec $\hat{\ell}_\alpha$ comme champ de vecteurs principaux.

(b) - Le champ de vecteurs $\hat{\ell}_\alpha$, isotropes, géodésiques est sans distorsion.

Ces notions seront d'un usage fréquent dans cette étude.

II. EQUATIONS DU CHAMP

2 1. - Système de coordonnées - Repères.

Nous supposons l'existence globale d'une famille d'hypersurfaces caractéristiques à un paramètre u = Cte, régulièrement définies dans un domaine ouvert Ω, de la variété V_4, complémentaire d'un tube d'univers incluant les régions dans lesquelles ou le champ est intense, ou le fluide isotrope très dense. Le champ de gradient:

$$(2.1) \qquad l_\alpha = \partial_\alpha u$$

constitue le premier élément de la base que nous voulons définir en chaque point de Ω . Pour la construire il y a lieu d'associer à l_α , trois autres champs de vecteurs isotropes n_α, m_α et $\bar{m}_\alpha$ satisfaisant les relations suivantes :

$$(2.2) \qquad l_\alpha n^\alpha = -m_\alpha \bar{m}^\alpha = 1 \quad , \quad l^\alpha m_\alpha = n^\alpha m_\alpha = 0$$

semblables à (1.5). On dispose ainsi, en chaque point $x \in V_4$, d'un 4-repère, ou tétrade, pseudo-orthonormé.

Les composantes du tenseur métrique g , en coordonnées locales, s'écrivent :

$$(2.3) \qquad g_{\alpha\beta} = l_\alpha n_\beta + l_\beta n_\alpha - m_\alpha \bar{m}_\beta - \bar{m}_\alpha m_\beta \ .$$

La congruence des trajectoires de l_α est manifestement géodésique; comme elle est isotrope, elle engendre les hypersurfaces u = Cte.
On choisit maintenant un système de coordonnées locales adapté à l_α . Le scalaire u est la coordonnée x^0 ; ensuite r , un paramètre affine le long de chacune des trajectoires de l_α , la coordonnée x^1 ; enfin les deux autres x^i (i = 2, 3), qui restent constantes le long de chaque trajectoire de l_α , complètent le système. Compte tenu de (2.2), les composantes l^α, n^α , m^α rapportées à ce système de coordonnées, s'écrivent comme suit :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} l^\alpha = \delta^\alpha_1 \qquad\qquad l_\alpha = \delta^0_\alpha \\ m^\alpha = \omega \delta^\alpha_1 + \xi^i \delta^\alpha_i \\ n^\alpha = \delta^\alpha_0 + U \delta^\alpha_1 + X^i \delta^\alpha_i \qquad (i, j, k \ldots = 2, 3) \end{cases}$$

où : U et X^i sont des fonctions réelles, ω et ξ_1^i des fonctions complexes des coordonnées (u, r, x^i).

Le champ de repères choisi donne certaines relations entre les coeffincients de rotation. Il résulte de (2.1) :

(2.5) $$\varrho = \bar{\varrho}$$

(2.6) $$\tau = \bar{\alpha} + \beta \ .$$

On peut, de plus, imposer aux repères, définis aux points d'une même trajectoire de ℓ_α , de se déduire les uns des autres par transport parallèle le long de la dite trajectoire; cela entraine :

(2.7) $$\kappa = \epsilon = \pi = 0 \ .$$

2 2. - Expression des projections du second membre des équations du champ.

Pour obtenir ces projections il faut décomposer $\hat{\ell}_\alpha$ sur le repère $(\ell_\alpha, n_\alpha, m_\alpha, \bar{m}_\alpha)$; on pose donc :

(2.8) $$\hat{\ell}_\alpha = C (\ell_\alpha + \bar{b}\, m_\alpha + b\, \bar{m}_\alpha + b\bar{b}\, n_\alpha)$$

où C et b désignent deux fonctions de (u, r, x^i) respectivement réelle et complexe. Cette expression de $\hat{\ell}_\alpha$ peut être portée dans (1.1) et les projections de $R_{\alpha\beta}$ déterminées facilement; en voici la liste :

(2.9)
$$\left\{\begin{array}{lll}
\Phi_{00} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \ell^\alpha \ell^\beta & = Q(b\bar{b})^2 & \\
\Phi_{11} = -\frac{1}{4} R_{\alpha\beta} (\ell^\alpha n^\beta + m^\alpha \bar{m}^\beta) & = Q\, b\bar{b} & \\
\Phi_{01} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \ell^\alpha m^\beta & = -Q\, b^2 \bar{b} & \\
\Phi_{12} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta & = -Q\, b & \\
\Phi_{10} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \ell^\alpha \bar{m}^\beta & = -Q\, \bar{b}^2 b & (\equiv \bar{\Phi}_{01}) \\
\Phi_{21} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} n^\alpha \bar{m}^\beta & = -Q\, \bar{b} & (\equiv \bar{\Phi}_{12}) \\
\Phi_{02} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} m^\alpha m^\beta & = Q\, b^2 & (\equiv \bar{\Phi}_{20}) \\
\Phi_{22} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta & = Q & \\
\Phi_{20} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta & = Q\, \bar{b}^2 \ ; &
\end{array}\right.$$

on a posé : $$Q \equiv \Phi C^2 \ .$$

Nous sommes maintenant en possession des éléments nécessaires pour écrire le système complet des équations de Newman-Penrose [7] dans le cas intérieur décrit par les équations du champ (1.1)

2 3. - Ecriture des équations du champ.

Comme dans le cas du vide il convient de classer ces équations en trois groupes :

2 3 1 Equations radiales :

(2.10)

a $D\xi^i = \rho\,\xi^i + \sigma\,\bar{\xi}^i$

b $D\omega = \rho\,\omega + \sigma\,\bar{\omega} - (\alpha+\beta)$

c $DX^i = (\bar{\alpha}+\beta)\,\xi^i + (\alpha+\bar{\beta})\,\bar{\xi}^i$

d $DU = (\bar{\alpha}+\beta)\,\bar{\omega} + (\alpha+\bar{\beta})\,\omega - (\gamma+\bar{\gamma})$

e $D\rho = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + Q\,(b\bar{b})^2$

f $D\sigma = 2\rho\sigma + \Psi_0$

g $D\tau = \rho\,\tau + \sigma\,\bar{\tau} + \Psi_1 - Q\,b^2\bar{b}$

h $D\alpha = \rho\,\alpha + \bar{\sigma}\,\beta - Q\,\bar{b}^2 b$

i $D\beta = \rho\beta + \sigma\,\alpha + \Psi_1$

j $D\gamma = \tau\alpha + \bar{\tau}\,\beta + \Psi_2 + Q\,b\bar{b}$

k $D\lambda = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + Q\,\bar{b}^2$

l $D\mu = \bar{\rho}\mu + \sigma\,\lambda + \Psi_2$

m $D\nu = \tau\lambda + \bar{\tau}\,\mu + \Psi_3 - Q\,\bar{b}$

(2.10)

n $D\Psi_1 - \delta\Psi_0 + D(Q\,b^2\bar{b}) + \delta(Q\,b^2\bar{b}^2) =$
$4\rho\Psi_1 + 4\alpha\Psi_0 + 2Q\left[(\bar{\alpha}+\beta)(b\bar{b})^2 + \rho\,b^2\bar{b} + \sigma\,\bar{b}^2 b\right]$

o $3(D\Psi_2 - \delta\Psi_1) - 2\left[D(Q\,b\bar{b}) + \delta(Q\,\bar{b}^2 b)\right] + \delta(Qb^2\bar{b}) + \Delta(Qb^2\bar{b}^2) =$
$9\rho\,\Psi_2 - 6\alpha\,\Psi_1 - 3\lambda\Psi_0 + Q\left\{\left[2(\mu+\gamma+\bar{\gamma}) - \bar{\mu}\right](b\bar{b})^2 + 2(\alpha+\bar{\tau})b^2\bar{b}\right.$
$\left. + 2(\beta-\bar{\alpha})\bar{b}^2 b - 2\rho\,b\bar{b} - 2\sigma\bar{b}^2 + \bar{\sigma}\,b^2\right\}$

p $3(D\Psi_3 - \delta\Psi_2) + D(Q\bar{b}) + \delta(Q\bar{b}^2) - 2\left[\bar{\delta}(Q\,b\bar{b}) + \Delta(Q\,\bar{b}^2 b)\right] =$
$6\rho\,\Psi_3 - 6\lambda\,\Psi_1 + 2Q\left[\nu(b\bar{b})^2 - \lambda\,b^2\bar{b} + (\bar{\mu} - \mu - 2\gamma)\bar{b}^2 b - 2\bar{\tau}\,b\bar{b} - 2\beta\bar{b}^2 - \bar{\sigma}b\right]$

$$q \quad D\Psi_4 - \delta\Psi_3 + \bar\delta(Q\bar b) + \Delta(Q b^2) = \rho\Psi_4 + 2\alpha\Psi_3 - 3\lambda\Psi_2 + Q\left[-2\nu b^2 b - 2\lambda b\bar b - (2\gamma - 2\bar\delta + \bar\mu)b^2 + 2\beta\bar b + \bar\sigma\right]$$

$$r \quad DQ + \delta(\bar b Q) + \bar\delta(bQ) + \Delta(Q b\bar b) = Q\left[2\rho + (\alpha - \bar\beta)b + (\bar\alpha - \beta)\bar b - 2(\mu + \bar\mu)b\bar b - (\lambda b^2 + \bar\lambda \bar b^2) - (\nu b + \bar\nu \bar b) b\bar b\right]$$

2.10)

$$s \quad Db + \bar b\,\delta b + b\,\bar\delta b + b\bar b\,\Delta b = \rho b + \sigma\bar b + 2\alpha b^2 + (\bar\alpha + 3\beta) b\bar b + \lambda b^3 + \nu b^3\bar b + (2\gamma + \mu) b^2\bar b$$

Les équations (2.10 n...s) sont les projections, sur la tétrade $(\ell, n, m, \bar m)$ de certaines des identités de Bianchi formulées en tenant compte de (1.1); les projections des autres constituent le troisième groupe des équations du champ. Notons que les deux dernières relations (2.10 r.s) ne sont autres que les équations de conservation déjà écrites, en d'autres termes, en (1.6) (1.7). Pour clore la liste des équations radiales, il faut encore ajouter la transcription de (1.8); soit :

$$\hat\epsilon + \bar{\hat\epsilon} = D\mathcal{C} + \bar b\,\delta\mathcal{C} + b\,\bar\delta\mathcal{C} + b\bar b\,\Delta\mathcal{C} + \mathcal{C}\left[(\alpha + \bar\beta) b + (\bar\alpha + \beta)\bar b + (\mu + \bar\mu + \gamma + \bar\gamma) b\bar b + b^2\lambda + \bar b^2\bar\lambda + (b\nu + \bar b\bar\nu) b\bar b\right] = 0 .$$

(2.11)

Rappelons que cette relation signifie que les trajectoires géodésiques de $\hat\ell_a$ sont rapportées à un paramètre affine.

Passons au second groupe des équations du champ.

2 3 2 Equations non radiales

$$a \quad \delta X^i - \Delta\xi^i = (\mu + \bar\gamma - \gamma)\xi^i + \bar\lambda\,\bar\xi^i$$

$$b \quad \delta\bar\xi^i - \bar\delta\xi^i = (\bar\beta - \alpha)\xi^i + (\bar\alpha - \beta)\bar\xi^i$$

$$c \quad \delta\bar\omega - \bar\delta\omega = (\bar\beta - \alpha)\omega + (\bar\alpha - \beta)\bar\omega + (\mu - \bar\mu)$$

$$d \quad \delta U - \Delta\omega = (\mu + \bar\gamma - \gamma)\omega + \bar\lambda\bar\omega - \bar\nu$$

$$e \quad \Delta\lambda - \delta\nu = -(\mu + \bar\mu + 3\gamma - \bar\gamma)\lambda + 2\alpha\gamma - \Psi_4$$

$$f \quad \delta\rho - \bar\delta\sigma = (\bar\alpha + \beta)\rho - (3\alpha - \bar\beta)\sigma - \Psi_1 - Q b^2\bar b$$

(2.12)

$$g \quad \delta\alpha - \bar\delta\beta = \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta - 2\alpha\beta - \Psi_2 + Q b\bar b$$

$$h \quad \delta\lambda - \bar\delta\mu = (\alpha + \bar\beta)\mu + (\bar\alpha - 3\beta)\lambda - \Psi_3 - Q\bar b$$

(2.12)

i $\quad \delta\nu - \Delta\mu = (\gamma + \bar\gamma + \mu)\mu + \bar\lambda\lambda - 2\nu\beta + Q$

j $\quad \delta\gamma - \Delta\beta = \tau\mu - \nu\sigma + (\mu - \gamma + \bar\gamma)\beta + \bar\lambda\alpha - Q$

k $\quad \delta\tau - \Delta\sigma = \bar\lambda\rho + (\delta + \mu - 3\gamma)\sigma + 2\tau\beta + Q b^2$

l $\quad \Delta\rho - \bar\delta\tau = (\gamma + \bar\gamma - \bar\mu)\rho - \lambda\sigma - 2\alpha\tau - \Psi_2$

m $\quad \Delta\alpha - \bar\delta\gamma = \nu\rho - (\tau + \beta)\lambda + (\bar\gamma - \gamma - \mu)\alpha - \Psi_3 .$

Ecrivons enfin le troisième groupe.

2 3 3 . Equations issues des identités de Bianchi, comportant des dérivées, par rapport à μ, des quantités Ψ_A :

(2.13)

a $\quad \Delta\Psi_0 - \delta\Psi_1 + D(Q b^2) + \delta(Q b^2 \bar b) =$
$(4\gamma - \mu)\Psi_0 - 2(2\tau + \beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 + Q\left[-\bar\lambda(b\bar b)^2 + 2\rho b^2\bar b + \rho b^2 + 2\sigma b\bar b\right]$

b $\quad 3(\Delta\Psi_1 - \delta\Psi_2) - 2\left[D(Qb) + \delta(Qb\bar b)\right] + \bar\delta(Q b^2) + \Delta(Q b^2\bar b) =$
$3\nu\Psi_0 + 6(\gamma - \mu)\Psi_1 - 9\tau\Psi_2 + 6\sigma\Psi_3 + Q\left[-\bar\nu(b\bar b)^2 - 2(\bar\mu - \mu - \gamma)b^2\bar b\right.$
$\left. - 2\bar\lambda b\bar b^2 + 2\tau b\bar b + (3\alpha - \bar\beta)b^2 - 2\sigma\bar b\right]$

c $\quad 3(\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3) + DQ + \delta(Q\bar b) - 2\left[\bar\delta(Qb) + \Delta(Qb\bar b)\right] =$
$6\nu\Psi_1 - 9\mu\Psi_2 - 6\bar\alpha\Psi_3 + 3\sigma\Psi_4 + Q\left[2\nu b^2\bar b + 2(2\bar\mu - \mu)b\bar b\right.$
$\left. + 2\bar\nu b\bar b^2 + 2\lambda b^2 - \bar\lambda\bar b^2 - 2(\alpha - \bar\beta)b - 2(\bar\alpha + 2\beta)\bar b - \rho\right]$

d $\quad \Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 + \bar\delta Q + \Delta(Q\bar b) = 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3$
$+ (3\beta - \bar\alpha)\Psi_4 - Q\left[2\nu b\bar b + \nu\bar b^2 + 2\lambda b + 2(\gamma + \bar\mu)\bar b + (\alpha + \bar\beta)\right].$

Terminons par l'expression, dans le repère $(\ell, m, \bar m, \bar m)$, de la relation caractérisant un champ de vecteurs $\hat\ell_\alpha$ sans distorsion :

(2.14) $\quad \hat\sigma = 0 \iff \delta b + b\Delta b = \sigma + b(\bar\alpha + 3\beta) + b^2(\mu + 2\gamma) + b^3\nu .$

Nous aurons à examiner précisément ce cas plus tard dans une section particulière

III RESOLUTION DES EQUATIONS DU CHAMP. CAS GENERAL $\hat{\sigma} \neq 0$.

3 1. - Caractérisation des solutions recherchées .

Ainsi que nous l'avons déjà noté nous nous intéressons seulement à la classe des solutions de (1.1) déterminant des espaces-temps à comportement asymptotiquement minkowskien. Eu égard au but poursuivi, il suffit, pour les bien caractériser, d'obtenir les expressions asymptotiques des fonctions de champ impliquées dans les équations (2.10) (2.11) (2.12) (2.13). Pour ce faire nous continuerons de nous inspirer des travaux de Newman-Penrose [1] , de Newman-Unti [2] et, éventuellement, utiliserons certaines de leurs conclusions.

Les hypothèses, posées au départ de cette étude des équations de champ, sont les suivantes [8] :

a) Sur $(\mathcal{D})$, les fonctions de champ admettant des développements limités, en puissances de $\frac{1}{r}$, dont les coefficients sont des fonctions de (u, x^i) suffisamment dérivables.

b) Les fonctions Ψ_0 , ρ , ξ^2 , ξ^3 ont, respectivement pour termes principaux

$$(3.1) \qquad \underset{(a)}{\frac{\Psi_0^0(u,x^i)}{r^5}} \; ; \; \underset{(b)}{-\frac{1}{r}} \; ; \; \underset{(c)}{\frac{1}{\sqrt{2}\,r}} \; , \; \frac{i}{\sqrt{2}\,r\sin\theta} \; .$$

Ces hypothèses sont suffisantes pour que la métrique de V_4 ait pour limite, lorsque r tend vers l'infini, celle de la métrique de l'espace-temps de Minkowski rapportée au système de coordonnées radiatif $\{u, r, x^2 \equiv \theta, x^3 \equiv \varphi\}$; soit précisément :

$$\lim_{r\to\infty}(g_{00}) = 1 \quad , \quad \lim_{r\to\infty}(g_{01}) = 1 \quad , \quad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{g_{0i}}{r}\right) = 0 \quad (i=2,3)$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{g_{22}}{r^2}\right) = -1 \quad , \quad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{g_{33}}{r^2}\right) = -\sin^2\theta \quad , \quad \lim_{r\to\infty}\left(\frac{g_{23}}{r^2}\right) = 0 .$$

Les coordonnées x^2 et x^3 sont maintenant fixées et désignent les coordonnées polaires θ et φ sur la sphère à deux dimensions S_2 . Le domaine ouvert $(\mathcal{D})$ se trouve, par suite, défini par :

$$\{u_1 < u < u_2 \; , \; r > r_1 \; , \; 0 \leq \theta \leq \pi \; , \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Nous sommes à présent en mesure de passer à l'étude des équations du champ. Comme la méthode que nous allons employer a déjà été appliquée à diverses reprises [1] [2] ... il ne sera pas nécessaire de s'appesantir sur le détail

des calculs, il suffira d'en préciser les étapes et de mettre en évidence les résultats spécifiques à notre problème.

3.2. - Solutions des équations radiales (2.10) (2.11).

L'intégration de ces équations va permettre de fixer la dépendance en r de chaque fonction de champ.

Compte tenu des hypothèses (plus fortes que celles de N.P. - N.U.) que nous avons formulées au paragraphe précédent, nous procédons comme suit : dans chaque équation (2.10) (2.11) on substitue à chacune des fonctions de champ mentionnée, un développement en puissances de $\frac{1}{r}$, à coefficients indéterminés, puis, après avoir pris en considération l'action des opérateurs D , Δ , δ , $\bar{\delta}$ qui y figurent éventuellement, on identifie les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$. La mise en oeuvre effective de ce processus permet de déterminer d'abord l'ordre de grandeur du terme principal de chaque fonction de champ et ensuite l'expression des termes d'ordre supérieur du développement en puissances de $\frac{1}{r}$.

Citons, à titre d'exemples, quelques-unes des expressions ainsi obtenues :

$$(3.2)\qquad \Psi_1 = \frac{\Psi_1^0}{r^4} + \frac{1}{r^5}\left(4\alpha^0 \Psi_0^0 - \bar{\xi}^{0A} \Psi_{0,A}^0 - 3 Q^0 (b^0)^2 \bar{b}^0 \right) + O\left(\frac{1}{r^6}\right)$$

. . . . . .

$$a)\qquad \Phi = \frac{\Phi^0}{r^2} + \frac{1}{r^3}\left[(\bar{b}^0 \bar{b}^0 \Phi^0)^{\cdot} + \bar{\xi}^{0A} (\bar{b}^0 \Phi^0)_{,A} + \bar{\xi}^{0A} (b^0 \Phi^0)_{,A} - 2\bar{\Phi}^0 (\alpha^0 b^0 + \bar{\alpha}^0 \bar{b}^0) \right] + O(\ldots)$$

$$(3.3)\quad b)\qquad b = \frac{b^0}{r} + \frac{1}{r^2}\left[(\bar{b}^0 \bar{\xi}^{0A} + b^0 \bar{\xi}^{0A}) b_{,A}^0 + 2(\bar{\alpha}^0 \bar{b}^0 - \alpha^0 b^0) b^0 + \dot{b}^0 b^0 \bar{b}^0 - \bar{b}^0 \alpha^{00} \right] + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$c)\qquad C = C^0 + \frac{1}{r}\left[(\bar{b}^0 \bar{\xi}^{0A} + b^0 \bar{\xi}^{0A}) C_{,A}^0 + \dot{C}^0 \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Ces dernières expressions nous montrent ce que sont les structures asymptotiques des fonctions Φ , b, C , déterminant le second membre de (1.1), compatibles avec l'obtention, comme solutions de (1.1), de métriques $g_{\alpha\beta}$ à comportement asymptotiquement minkowskien.

L'intégration des équations radiales conduit à introduire un ensemble

$$F^0 : \left\{ \Psi_1^0, \Psi_2^0, \Psi_3^0, \Psi_4^0 ; \rho , \sigma , \alpha , \beta , \lambda , \mu , \nu, \omega^0 ; \Phi^0, b^0, C^0 \right\}$$

de " constantes " arbitraires; bien entendu cette terminologie relève d'un abus de langage car, de fait, les éléments de F^0 sont des fonctions de (u, x^A)

momentanément arbitraires. L'objet du paragraphe suivant sera justement de les préciser.

3 3. - Expression de la solution

3 3 1. Pour caractériser les " constantes " rassemblées en Γ° on va exploiter les équations (2.10) (2.11) constituant les deuxième et troisième groupes des équations du champ.

Les calculs à effectuer seront conduits selon le principe, déjà exposé au paragraphe précédent, qui consiste, rappelons-le, à identifier, dans chaque équation les coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$. Il conviendra, bien entendu, lors de leur exécution pratique, de tenir compte des résultats acquis par l'étude des équations radiales.

Pour être en mesure de préciser clairement et concrètement quelques éléments de ces calculs il importe de donner, tout d'abord, le tableau complet des fonctions de champ. Afin d'avoir une formulation plus compacte et plus simple, au prix d'une légère anticipation sur la suite du développement, on a fait figurer dans les expressions ci-dessous, déduites au paragraphe 3.2, les opérateurs $\eth$, $\bar{\eth}$ dont les définitions sont [9] :

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \eth \chi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - s \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \chi \\ \bar{\eth} \chi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + s \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \chi \end{cases}$$

où χ est une fonction de poids de spin s .

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}
&\text{a} \quad \Psi_0 = \frac{\Psi_0^\circ}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^6}\right) \\
&\text{b} \quad \Psi_1 = \frac{\Psi_1^\circ}{r^4} + \frac{1}{r^5}\left(\eth \Psi_0^\circ - 3\, Q^\circ B^{\circ 2} \bar{B}^\circ \right) + O\left(\frac{1}{r^6}\right) \\
&\text{c} \quad \Psi_2 = \frac{\Psi_2^\circ}{r^3} + \frac{1}{r^4}\left(\eth \Psi_1^\circ + 2\, Q^\circ B^\circ \bar{B}^\circ \right) + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \\
&\text{d} \quad \Psi_3 = \frac{\Psi_3^\circ}{r^2} + \frac{1}{r^3}\left(\eth \Psi_2^\circ - Q^\circ B^\circ \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
&\text{e} \quad \Psi_4 = \frac{\Psi_4^\circ}{r} + \frac{1}{r^2} \eth \Psi_3^\circ + O\left(\frac{1}{r^3}\right) ;
\end{aligned}$$

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}
&\text{a} \quad \rho = -\frac{1}{r} - \frac{\sigma^\circ \bar{\sigma}^\circ}{r^3} - \frac{1}{3r^5}\left[3(\sigma^\circ \bar{\sigma}^\circ)^2 - \frac{1}{2}\left(\sigma^\circ \bar{\Psi}_0^\circ + \bar{\sigma}^\circ \Psi_0^\circ \right) + Q^2 (B^\circ \bar{B}^\circ)^2 \right] + O\left(\frac{1}{r^6}\right) \\
&\text{b} \quad \sigma = \frac{\sigma^\circ}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left[(\sigma^\circ)^2 \bar{\sigma}^\circ - \frac{1}{2} \Psi_0^\circ \right] + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \\
&\text{c} \quad \alpha = \frac{\alpha^\circ}{r} + \frac{\bar{\sigma}^\circ \alpha^\circ}{r^2} + \frac{\sigma^{\circ 2} \bar{\sigma}^\circ \alpha^\circ}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

(3.6)

$$\text{d}\qquad \beta = -\frac{\eth^{\circ}}{r} - \frac{\sigma^{\circ}\bar{\eth}^{\circ}}{r^2} - \frac{1}{r^3}\left(\sigma^{\circ}\bar{\sigma}^{\circ}\alpha^{\circ} + \frac{1}{2}\Psi_1^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\text{e}\qquad \tau = -\frac{\Psi_1^{\circ}}{2r^2} + \frac{1}{6r^3}\left(\sigma^{\circ}\bar{\Psi}_1^{\circ} - 2\eth\Psi_0^{\circ} + 8Q^{\circ}b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\text{f}\qquad \lambda = \frac{\lambda^{\circ}}{r} - \frac{\bar{\sigma}^{\circ}\mu^{\circ}}{r^2} + \frac{1}{r^3}\left(\sigma^{\circ}\bar{\sigma}^{\circ}\lambda^{\circ} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\circ}\Psi_1^{\circ} - \frac{Q^{\circ}}{2}b^{\circ 2}\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{g}\qquad \mu = \frac{\mu^{\circ}}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\lambda^{\circ}\sigma^{\circ} + \Psi_2^{\circ}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\sigma^{\circ}\bar{\sigma}^{\circ}\mu^{\circ} - \frac{\bar{\eth}\Psi_1^{\circ}}{2} - Q^{\circ}b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{h}\qquad \gamma = \gamma^{\circ} - \frac{\Psi_2^{\circ}}{2r^2} - \frac{1}{6r^3}\left(2\bar{\eth}\Psi_1^{\circ} - \alpha^{\circ}\Psi_1^{\circ} + \bar{\alpha}^{\circ}\bar{\Psi}_1^{\circ} + 6Q^{\circ}b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{i}\qquad \nu = \nu^{\circ} - \frac{\Psi_3^{\circ}}{r} - \frac{1}{2r^2}\left(\bar{\eth}\Psi_2^{\circ} - 2Q^{\circ}\bar{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) ;$$

(3.7)

$$\text{a}\qquad U = -(\gamma^{\circ} + \bar{\gamma}^{\circ})r + U^{\circ} - \frac{1}{2r}\left(\Psi_2^{\circ} + \bar{\Psi}_2^{\circ}\right) - \frac{1}{6r^2}\left(\bar{\eth}\Psi_1^{\circ} + \eth\bar{\Psi}_1^{\circ} + 6Q^{\circ}b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\text{b}\qquad \sqrt{2}\left(X^1 + i\sin\theta X^3\right) = \frac{\Psi_1^{\circ}}{3r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{c}\qquad \sqrt{2}\,\xi^2 = \frac{1}{r} - \frac{\sigma^{\circ}}{r^2} + \frac{\sigma^{\circ}\bar{\sigma}^{\circ}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{d}\qquad -i\sqrt{2}\sin\theta\,\xi^3 = \frac{1}{r} + \frac{\sigma^{\circ}}{r^2} + \frac{\sigma^{\circ}\bar{\sigma}^{\circ}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{e}\qquad \omega = \frac{\omega^{\circ}}{r} - \frac{1}{r^2}\left(\nu^{\circ}\bar{\omega}^{\circ} + \frac{1}{2}\Psi_1^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) ;$$

(3.8)

$$\text{a}\qquad \Phi = \frac{\Phi^{\circ}}{r^2} - \frac{1}{r^3}\left[\eth\left(\bar{b}^{\circ}\Phi^{\circ}\right) + \bar{\eth}\left(b^{\circ}\Phi^{\circ}\right) - \left(b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\Phi^{\circ}\right)^{\cdot}\right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$\text{b}\qquad b = \frac{b^{\circ}}{r} - \frac{1}{r^2}\left(b^{\circ}\eth b^{\circ} + \bar{b}^{\circ}\eth b^{\circ} + b^{\circ}\sigma^{\circ} - b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\dot{b}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\text{c}\qquad C = C^{\circ} - \frac{1}{r}\left(\bar{b}^{\circ}\eth C^{\circ} + b^{\circ}\eth C^{\circ} - b^{\circ}\bar{b}^{\circ}\dot{C}^{\circ}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) .$$

3 3 2 . Nous allons maintenant déterminer certaines des " constantes" inclues dans ces expressions en procédant aux identifications annoncées au début de ce paragraphe.

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r}$ dans les deux membres de (2.12a), compte tenu de (3.1c), permet de voir que :

(3.9) $\qquad \gamma^{\circ} = 0$

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^4}$ dans les deux membres de (2.12b) donne α° :

$$(3.10) \qquad -\beta^\circ = \alpha^\circ = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{cotg}\theta .$$

. Compte tenu de ce résultat et de (3.1c), on détermine, par identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (2.12g), la valeur de μ° :

$$(3.11) \qquad \mu^\circ = -\frac{1}{2} .$$

. En tenant compte de ce dernier résultat et de (3.1 b.c), on déduit de l'identification des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (2.12 1), la valeur de U° :

$$(3.12) \qquad U^\circ = -\frac{1}{2} .$$

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^3}$ des membres de (2.12f), compte tenu de (3.1 b.c), donne :

$$(3.13) \qquad \omega^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\eth \sigma^\circ + 2 \operatorname{cotg}\theta \, \sigma^\circ \right)$$

avec :

$$(3.14) \qquad \eth = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad , \qquad \bar{\eth} = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} .$$

L'expression (3.13), déterminant la quantité ω° , peut également être formulée à l'aide de l'opérateur $\mathcal{D}$, défini par (3.4), car la fonction σ°, qu'elle contient, a un poids de spin bien déterminé égal à + 2. Pour la clarté de notre exposé il importe de rappeler précisément la définition de cette notion [9] .

Si l'on effectue une rotation, des vecteurs de genre espace $Re(m\mu)$ et $Im(m\mu)$ dans leur plan, donnée par :

$$(3.15) \qquad (m\mu)' = e^{i\psi} m\mu ,$$

(avec $(\ell\mu)' = \ell\mu$ et ψ réel) on a alors :

$$(3.16) \qquad (\sigma)' = e^{2i\psi} \sigma .$$

Et nous disons que la distorsion σ a un poids de spin s égal à + 2; il en est de même pour sa partie principale σ° .
D'une façon générale une quantité χ est dite avoir un poinds de spin s si

elle se transforme selon :

(3.17) $$(\chi)' = e^{is\Psi}\chi .$$

Nous pouvons maintenant reformuler le second membre de (3.13) comme suit :

(3.18) $$\omega^\circ = -\eth\sigma^\circ .$$

. L'identification des termes constants dans les deux membres de (2.12 d) permet, compte tenu de (3.9), de voir que :

(3.19) $$\nu^\circ = 0$$

et celle des coefficients des termes en $\frac{1}{r}$ donne :

$$\Psi_1^\circ = -\dot{\omega}^\circ ;$$

soit, compte tenu de (3.18) :

(3.20) $$\Psi_1^\circ = \eth\dot{\sigma}^\circ$$

car les opérateurs $\eth$ et $\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial u}$ sont permuttables puisqu'ils n'agissent pas sur les mêmes variables.

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^2}$ des membres de (2.12 k) permet, compte tenu de (3.9), de déterminer λ° :

(3.21) $$\lambda^\circ = \dot{\phi}^\circ .$$

. Ensuite l'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r}$ des deux membres de (2.12 e), compte tenu de (3.9) (3.19) et (3.21), donne Ψ_4° :

(3.22) $$\Psi_4^\circ = -\ddot{\sigma}^\circ .$$

. Enfin de l'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r}$ des membres de (2.12 c) on déduit, en tenant compte de (3.1c) (3.10) (3.21), l'expression de la partie imaginaire de Ψ_2°:

(3.23) $$\Psi_2^\circ - \bar{\Psi}_2^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\bar{\nabla} + \cot g\,\theta)\omega^\circ - (\nabla + \cot g\,\theta)\bar{\omega}^\circ\right] + \bar{\sigma}^\circ\dot{\sigma}^\circ - \sigma^\circ\dot{\bar{\sigma}}^\circ ,$$

où ∇ et $\bar{\nabla}$ notent les opérateurs définis en (3.14).

Les opérateurs $\eth$ et $\bar{\eth}$ (3.4) respectivement, augmente et diminue d'une unité le poids de spin des fonctions sur lesquelles ils agissent [9] ; ceci fait, en raison de (3.18), que les quantités ω° et ϖ° ont pour poids de spin respectif + 1 et - 1. Il en résulte que le second membre de (3.23) peut être reformulé au moyen des opérateurs $\eth$ et $\bar{\eth}$; ce faisant, on obtient l'expression suivante :

(3.24) $$\Psi_1^\circ - \bar{\Psi}_1^\circ = \left(\bar{\eth}^2 \sigma^\circ + \bar{\varpi}^\circ \dot{\sigma}^\circ \right) - \left(\eth \bar{\varpi}^\circ + \dot{\bar{\varpi}}^\circ \sigma^\circ \right) .$$

Remarque. Les expressions mentionnées dans cet alinéa ne contiennent aucune des fonctions Φ°, $\mathcal{B}^\circ$ ou C° , relatives à la matière isotrope, elles ne diffèrent donc point de celles déjà obtenues, dans le cas du vide, par Newman et Unti [2].

A ce stade de l'étude, après utilisation des deux premiers groupes des équations de champ, les seules " constantes " d'intégration qui restent indéterminées sont σ°, Ψ_0° , Ψ_1° , $\Psi_2^\circ + \bar{\Psi}_2^\circ$ et Φ° , $\mathcal{B}^\circ$, C° .

La résolution des équations (2.13) du troisième groupe, que nous allons exposer à la suite, va permettre d'établir, entre certaines d'entre elles, des relations où les fonctions Φ° et $\mathcal{B}^\circ$ seront impliquées.

3 3 3 . Equations du mouvement.

Nous procédons, comme ci-dessus, pour chaque équation (2.13) par identification des coefficients des puissances successives de $\frac{1}{r}$.

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^5}$ des deux membres de l'équation (2.13a), compte tenu des résultats déjà acquis et en particulier de (3.5) (3.8) (3.9), donne la relation suivante :

(3.25) $$\dot{\Psi}_0^\circ - \bar{\eth}^\circ \Psi_{1,i}^\circ - 2 \bar{\alpha}^\circ \Psi_1^\circ - 3 \sigma^\circ \Psi_2^\circ - 3 Q^\circ (\mathcal{B}^\circ)^2 = 0$$

que l'on peut écrire, vu (3.1 c) (3.10) et (3.14) :

(3.26) $$\dot{\Psi}_0^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\nabla - \omega \operatorname{tg} \theta \right) \Psi_1^\circ - 3 \sigma^\circ \Psi_2^\circ - 3 Q^\circ (\mathcal{B}^\circ)^2 = 0 .$$

Comme Ψ_1° est une fonction de poids de spin + 1, on obtient finalement, après introduction de l'opérateur $\eth$, l'équation suivante :

(3.27) $$\dot{\Psi}_0^\circ + \eth \Psi_1^\circ - 3 \sigma^\circ \Psi_2^\circ - 3 Q^\circ (\mathcal{B}^\circ)^2 = 0 .$$

Nous pourrions poursuivre le processus d'identification engagé et obtenir ainsi, pour chacun des coefficients Ψ_0^1, Ψ_0^2 ... du développement de Ψ_0, une équation de propagation selon u, similaire à la précédente.

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^4}$ des deux membres de (2.13 b) conduit à :

$$\dot{\Psi}_1^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla \Psi_2^\circ - 2\sigma^\circ \Psi_3^\circ + 2 Q^\circ b^\circ = 0 , \qquad (3.28)$$

soit encore

$$\dot{\Psi}_1^\circ + \gamma \Psi_2^\circ - 2\sigma^\circ \Psi_3^\circ + 2 Q^\circ b^\circ = 0 . \qquad (3.29)$$

. L'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^3}$ des deux membres de (2.13c) donne, compte tenu de (3.10) :

$$\dot{\Psi}_2^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}} (\nabla - \operatorname{cotg}\theta) \Psi_3^\circ - \sigma^\circ \Psi_4^\circ - Q^\circ = 0 , \qquad (3.30)$$

soit :

$$\dot{\Psi}_2^\circ + \gamma \Psi_3^\circ - \sigma^\circ \Psi_4^\circ - Q^\circ = 0 . \qquad (3.31)$$

. Enfin l'identification des coefficients des termes en $\frac{1}{r^4}$ des deux membres de (2.13 d) donne, compte tenu de (3.4) (3.10) :

$$\dot{\Psi}_3^\circ + \gamma \Psi_4^\circ = 0 . \qquad (3.32)$$

Substituant à Ψ_3° et Ψ_4° leurs expressions (3.20) et (3.22) on constate que cette équation est identiquement vérifiée.

3 3 4 . Commentaires.

. Nous sommes maintenant arrivés au terme de l'étude des équations de champ (2.10) (2.12) (2.13); nous avons tiré de celles-ci toutes les informations, sur les fonctions de champ, qu'elles étaient susceptibles de nous apporter. Il y a lieu de préciser que les relations, que nous aurions pu déduire, grâce à la procédure d'identification, des équations ou des termes omis, n'auraient fait que confirmer les résultats précédemment acquis. Ainsi, il n'était point besoin de considérer (2.13 d) car la relation (3.32), qui en

est issue, n'apporte aucune précision nouvelle.

. La présence, au second membre de (1.1), du tenseur énergie-impulsion descriptif du schéma matière pure isotrope a une incidence sûr l'expression des termes d'ordre supérieur des développements (3.5) (3.6) (3.7) des fonctions de champ et sur l'écriture des équations du mouvement (3.27) (3.29) (3.31), lesquels contiennent des termes complémentaires spécifiques de ce schéma.

3 4. - Données initiales

L'objet de ce paragraphe est d'achever la détermination des fonctions de champ, caractéristiques de la classe de solutions envisagée, en fixant les valeurs initiales de certaines d'entre elles d'une façon qu'il importe de préciser.

Remarquons tout d'abord que l'on peut poser $C^\circ \equiv 1$ partout[1]; on fixe ainsi l'échelle des unités pour Φ . Il en résulte que :

$$Q^\circ \equiv \Phi^\circ .$$

Les données initiales choisies sont les suivantes :

(1) La quantité $\Psi_0 (r, u, x^i)$ sur l'hypersurface caractéristique de départ $u = u_0$ avec la restriction : $\lim_{r \to \infty} (r^5 \Psi_0) < \infty$.

(2) Les quantités $\sigma^\circ (u, x^i) \equiv \lim_{r \to \infty} (r^2 \sigma)$, $\Phi^\circ \equiv \lim_{r \to \infty} (r^2 \Phi)$

et $b^\circ \equiv \lim_{r \to \infty} (r\, b)$

sur le tube d'univers de genre temps situé à l'infini spatial : $r = \text{cte} \longrightarrow \infty$.

(3) Les quantités $\Psi_1^\circ \equiv \lim_{r \to \infty} (r^4 \Psi_1)$

et $\Psi_2^\circ + \bar{\Psi}_2^\circ \equiv \lim_{r \to \infty} \left[r^3 (\Psi_2 + \bar{\Psi}_2) \right]$

sur la 2 -surface qui est définie par l'intersection de l'hypersurface caractéristique $u = u_0$ et du tube d'univers $r = \text{cte} \longrightarrow \infty$.

La connaissance de ces données permet, en principe, de déterminer les solutions Ψ_0°, Ψ_1°, Ψ_2° des équations (3.27) (3.29) (3.31) au voisinage de l'hypersurface initiale $u = u_0$. Ensuite ces quantités et les données

---

(1) Le développement de C prend alors la forme:

(3.8 c') $$C = 1 + O\left(\frac{1}{r^2}\right) .$$

initiales σ°, Φ°, $\mathcal{B}^\circ$ sont introduites dans les développements où elles figurent et ainsi l'ensemble des fonctions de champ est connu et le problème posé résolu.

Ajoutons que ces fonctions seront déterminées d'autant plus précisément, c'est à dire par des développements limités comportant un plus grand nombre de termes, que la donnée de $\Psi_\circ$ aura été elle-même plus précise c'est à dire qu'un nombre plus élevé de coefficients $\Psi_\circ^i$ auront été fixés sur l'hypersurface caractéristique initiale $u = u_\circ$. En principe on pourrait même déterminer le champ - à l'exception des constantes d'intégration indépendantes - complètement et univoquement à partir de la donnée de $\Psi_\circ$ sous forme de série infinie :

$$\Psi_\circ = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_\circ^i}{r^{5+i}}$$

sur l'hypersurface $u = u_\circ$.

L'étude des équations de champ, que nous venons de mener, a trait au cas général, celui où la distorsion $\hat{\sigma}$ du champ de vecteurs $\hat{l}_\alpha$ n'est pas nulle; le cas particulier où cette quantité est nulle sera traité dans la section suivante.

IV. SOLUTION DES EQUATIONS DE CHAMP DANS LE CAS PARTICULIER $\hat{\sigma} = 0$.

4 1. - Analyse des conséquences de la relation supplémentaire $\hat{\sigma} = 0$ (2.14).

La méthode de Newman-Penrose, que nous suivons, permet de décrire essentiellement le comportement asymptotique des fonctions de champ et des quantités qui s'en déduisent; aussi bien convient-il de considérer que l'hypothèse $\hat{\sigma} = 0$ est seulement réalisée de façon asymptotique avec une précision que nous indiquerons ci-dessous. (Observons, incidemment, que cette remarque vaut pareillement pour $\hat{\kappa}$, $\hat{\epsilon} + \bar{\hat{\epsilon}} = 0$).

L'étude des équations radiales (2.10) (2.11), des équations (2.12) et (2.13), telle qu'elle a été menée aux paragraphes 3 1, 3 2, 3 3, demeure entièrement valable présentement; il nous faut seulement la compléter en élucidant les conséquences de la relation supplémentaire (2.14) :

$$(4.1) \qquad \delta b + b \Delta b = \sigma + b(\bar{\alpha} + 3\beta) + b^2(\mu + 2\gamma) + b^3 \nu ,$$

traduisant la nullité de la distorsion du champ $\hat{\ell}_\alpha$.

Substituons, pour un instant, à (3.8 b) l'expression indéterminée du développement de b , soit :

$$(4.2) \qquad b = \frac{\overset{\circ}{b}}{r} + \frac{\overset{1}{b}}{r^2} + \cdots\cdots$$

et identifions dans l'équation (2.14), reécrite en (4.1), les coefficients des termes en $\frac{1}{r^2}$, puis en $\frac{1}{r^3}$; compte tenu de (3.9) (3.19)... on obtient successivement :

$$(4.3) \left(\frac{1}{r^2}\right) : \quad \overset{\circ}{\xi}^{\circ i}\, \overset{\circ}{b}_{,i} + 2\,\overset{\circ}{\beta}\,\overset{\circ}{a}^{\circ} + \overset{\circ}{b}\,\overset{\circ}{b} - \sigma^{\circ} = 0 ,$$

$$(4.4) \left(\frac{1}{r^3}\right) : \quad \omega^{\circ}\,\overset{\circ}{b} - \overset{\circ}{\xi}^{\circ i}\,\hat{b}_{,i} + 2\,\hat{b}\,\hat{a}^{\circ} + \sigma^{\circ}\left(\overset{\circ}{\xi}^{\circ i}\,\overset{\circ}{b}_{,i} - 2\,\alpha^{\circ}\,\overset{\circ}{b}\right) + 2\mu^{\circ}(\overset{\circ}{b})^2 - (\overset{\circ}{b}\,\overset{\circ}{b})^{\cdot} = 0 .$$

La relation (4.3), compte tenu de (3.1 c) (3.10) (3.14), peut s'écrire :

$$(4.5) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nabla - \operatorname{cotg}\theta\right)\overset{\circ}{b} + \overset{\circ}{b}\,\overset{\circ}{b} - \sigma^{\circ} = 0$$

soit encore, à l'aide de $\mathcal{T}$ (3.4) :

$$(4.6) \qquad \overset{\circ}{b}\,\overset{\circ}{b} - \mathcal{T}\,\overset{\circ}{b} - \sigma^{\circ} = 0 ;$$

cette équation régit la propagation de $\overset{\circ}{b}$ selon u et la lie à σ° , partie principale de la distorsion du champ de vecteurs ℓ_α .

Le développement limité de b (3.8 b) s'écrit maintenant, en raison de (4.5), ainsi qu'il suit :

$$(4.7) \qquad b = \frac{\overset{\circ}{b}}{r} - \frac{\overset{\circ}{b}\,\overline{\mathcal{T}}\,\overset{\circ}{b}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) .$$

Compte tenu de (3.1 c) (3.10) (3.11) (3.13) (3.14), on voit que la relation (4.4) peut être reformulée de la façon suivante :

$$(4.8) \qquad \frac{\overset{\circ}{b}}{\sqrt{2}}\left(\nabla + 2\operatorname{cotg}\theta\right)\sigma^{\circ} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nabla - \operatorname{cotg}\theta\right)\hat{b} + \frac{\sigma^{\circ}}{\sqrt{2}}\left(\nabla - \operatorname{cotg}\theta\right)\overset{\circ}{b} - (\overset{\circ}{b})^2 - (\overset{\circ}{b}\,\overset{\circ}{b})^{\cdot} = 0$$

et, comme la quantité $\hat{b}$ déduite de (4.7) vaut :

$$\hat{b} = -\,\overset{\circ}{b}\,\overline{\mathcal{T}}\,\overset{\circ}{b}$$

on aboutit finalement à l'équation :

$$\overset{\circ}{b}\,\bar{\eth}\sigma^{\circ} + \eth(\overset{\circ}{b}\,\bar{\eth}\,\overset{\circ}{b}) + \sigma^{\circ}\,\bar{\eth}\,\overset{\circ}{b} + (\overset{\circ}{b})^2 - [\overset{\circ}{b}(\overset{\circ}{b}\,\bar{\eth}\,\overset{\circ}{b})]^{\cdot} = 0 \qquad (4.9)$$

qui, compte tenu de la relation de commutation des opérateurs $\eth, \bar{\eth}$ [9] :

$$(\bar{\eth}\eth - \eth\bar{\eth})\chi = s\chi \qquad (4.10)$$

(où s est le poids de spin de la fonction χ)
et de l'équation (4.6), est identiquement vérifiée.

Il en résulte que l'hypothèse portant sur $\hat{\sigma}$ se trouve effectivement réalisée jusqu'à l'ordre $\frac{1}{r^3}$ inclus; on a donc :

$$\hat{\sigma} = O\left(\frac{1}{r^4}\right). \qquad (4.11)$$

Continuons l'analyse des conséquences de l'hypothèse $\hat{\sigma} = 0$ en appliquant le théorème de Goldberg-Sachs, dont nous avons rappelé l'énoncé au paragraphe 1 2 et que l'on peut exprimer brièvement par l'implication suivante :

$$\hat{\sigma} = 0 \longrightarrow \hat{\Psi}_0 = \hat{\Psi}_1 = 0 \qquad (4.12)$$

d'où il résulte deux relations équivalentes aux précédentes entre les scalaires Ψ_R et b , soit :

$$\begin{cases} \Psi_0 = b^2 (6\Psi_2 + 8 b \Psi_3 + 3 b^2 \Psi_4) \\ \Psi_1 = -b (3\Psi_2 + 3 b \Psi_3 + b^2 \Psi_4) . \end{cases} \qquad (4.13)$$

(Il est bien clair que (4.12) et (4.13) doivent être comprises d'une façon cohérente avec (4.11) .)

En substituant à chacune des fonctions composant (4.13), son développement (3.5) (4.7) et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de $\frac{1}{r}$, on obtient :

$$\Psi^{\circ}_1 = -\overset{\circ}{b} (3\Psi^{\circ}_2 + 3 \overset{\circ}{b} \Psi^{\circ}_3 + (\overset{\circ}{b})^2 \Psi^{\circ}_4) \qquad (4.14)$$

$$\Psi^{\circ}_0 = (\overset{\circ}{b})^2 (6 \Psi^{\circ}_2 + 8 \overset{\circ}{b} \Psi^{\circ}_3 + 3(\overset{\circ}{b})^2 \Psi^{\circ}_4) \qquad (4.15)$$

(4.16) $$\Psi_0' = -\left[10\,\delta(\mathring{b}^3\Psi_2^\circ) + 15\,\delta(\mathring{b}^4\Psi_3^\circ) + 6\,\bar{\delta}(\mathring{b}^5\Psi_4^\circ) + 4\,Q^\circ\,\mathring{b}^3\mathring{b}\right].$$

Considérant l'ensemble des relations (3.27) (3.29) (3.31) - (4.6) (4.14) (4.15) il semblerait qu'un problème de compatibilité se pose; or, en réalité, grâce au théorème de Glodberg-Sachs [5], on sait qu'il n'en est rien. Ce fait implique qu'au moins l'une des relations citées puisse se déduire des autres; c'est ce que l'on va vérifier par un calcul direct. En voici les éléments : partant de (4.14) (4.15) on calcule les dérivées $\dot{\Psi}_1^\circ$, $\delta\Psi_1^\circ$, $\dot{\Psi}_0^\circ$ dont ensuite on introduit les expressions dans les équations (3.27) (3.29); il vient ainsi :

(4.17) $$(12\,\mathring{b}\dot{\mathring{b}} - 3\delta\mathring{b})(\Psi_1^\circ + 2\,\mathring{b}\Psi_3^\circ + \mathring{b}^2\Psi_4^\circ) + \mathring{b}^2(6\dot{\Psi}_2^\circ + 8\,\mathring{b}\dot{\Psi}_3^\circ + 3\mathring{b}^2\dot{\Psi}_4^\circ)$$
$$- \mathring{b}(3\delta\Psi_2^\circ + 3\,\mathring{b}\delta\Psi_3^\circ + \mathring{b}^2\delta\Psi_4^\circ) - 3\sigma^\circ\Psi_2^\circ - 3Q^\circ\mathring{b}^2 = 0,$$

(4.18) $$3\dot{\mathring{b}}(\Psi_1^\circ + 2\,\mathring{b}\Psi_3^\circ + \mathring{b}^2\Psi_4^\circ) - \mathring{b}(3\dot{\Psi}_2^\circ + 3\,\mathring{b}\dot{\Psi}_3^\circ + \mathring{b}^2\dot{\Psi}_4^\circ)$$
$$+ \delta\Psi_2^\circ - 2\sigma^\circ\Psi_3^\circ + 2Q\,\mathring{b}^\circ = 0.$$

Combinant linéairement ces deux équations, compte tenu de (4.6), on obtient l'expression suivante :

(4.19) $$\mathring{b}(\dot{\Psi}_3^\circ + \delta\Psi_4^\circ) + (\dot{\Psi}_2^\circ + \delta\Psi_3^\circ - \sigma^\circ\Psi_4^\circ - Q^\circ) = 0$$

qui coïncide avec l'équation (3.31), car le facteur de $\mathring{b}$ est identiquement nul vu les formules (3.20) (3.22) donnant Ψ_3° et Ψ_4°. Ainsi lorsque $\hat{\sigma} = 0$, les trois équations de propagation (3.27) (3.29) (3.31) sont linéairement dépendantes; il reste donc un système de deux équations indépendantes portant sur les deux fonctions fondamentales (" Constantes ") $\Psi_2^\circ + \bar{\Psi}_2^\circ$ et $\mathring{b}$ à partir desquelles, grâce aux formules (4.6) (4.15)... (3.18)... (3.24), on est en mesure de déterminer σ°, Ψ_0°, Ψ_1°, etc... . La quantité Q° reste, quant à elle, arbitraire pour le moment.

Les deux équations évoquées ci-dessus sont déduites respectivement de (3.31) et (3.29) (ou de (4.18)) et, compte tenu de (3.20) (3.22) (4.6) (3.24), s'écrivent comme suit[1] :

(4.20) $$\dot{\Psi}_1^\circ + \bar{\delta}^2(\mathring{b}\dot{\mathring{b}} - \delta\mathring{b})^\cdot + (\bar{\mathring{b}}\dot{\bar{\mathring{b}}} - \bar{\delta}\bar{\mathring{b}})(\mathring{b}\dot{\mathring{b}} - \delta\mathring{b})^{\cdot\cdot} - Q^\circ = 0$$

---

(1) Les équations portent en fait sur $\mathring{b}$ et $(\Psi_2^\circ + \bar{\Psi}_2^\circ)$ car $\Psi_2^\circ - \bar{\Psi}_2^\circ$ est reliée à $\mathring{b}$ par les formules (3.24) et (4.6).

(4.21)

$$\left|\begin{array}{l}\Big\{\overset{\circ}{b}\big[3\Psi_2^\circ + 3\overset{\circ}{b}\,\gamma(\bar{\overset{\circ}{b}}\dot{\overset{\circ}{b}} - \bar\gamma\bar{\overset{\circ}{b}})^{\cdot} - \overset{\circ}{b}{}^2(\bar{\overset{\circ}{b}}\ddot{\overset{\circ}{b}} - \bar\gamma\bar{\overset{\circ}{b}})^{\cdot\cdot}\big]\Big\}^{\cdot} + \gamma\Psi_2^\circ \\ \quad + 2(\overset{\circ}{b}\dot{\overset{\circ}{b}} - \gamma\overset{\circ}{b})\gamma(\bar{\overset{\circ}{b}}\dot{\bar{\overset{\circ}{b}}} - \bar\gamma\bar{\overset{\circ}{b}})^{\cdot} - 2\overset{\circ}{b}Q^\circ = 0\end{array}\right.$$

Ainsi lorsque la distorsion $\hat{\sigma}$ du champ $\hat{\ell}_\alpha$ est nulle, il ne subsiste aucune " constante " arbitraire d'essence purement gravitationnelle; cette situation est très différente de celle que nous observions, dans le cas général, où la quantité $\sigma^{\circ\circ}$ n'est régie par aucune équation.

4 2. - Données initiales dans le cas $\hat{\sigma} = 0$.

Le champ sera complètement déterminé quand on aura fixé les données permettant, en principe, la résolution complète des équations (4.20) (4.21).

Comme dans le cas général on peut également poser $C^\circ \equiv 1$ partout ce qui implique[1]:

$$Q^\circ \equiv \Phi^\circ .$$

Les équations (4.20) (4.21) constituent un système, du premier ordre en Ψ_2° et du quatrième en $\overset{\circ}{b}$, dont la résolution requiert la connaissance des données initiales suivantes :

(1) La quantité $\Phi^\circ(u,x^i) \equiv \lim_{r\to\infty}(r^2\Phi)$ sur le tube d'univers du genre temps situé à l'infini spatial $r = C^{te} \to \infty$.

(2) Les quantités : $(\Psi_2^\circ + \bar\Psi_2^\circ) \equiv \lim_{r\to\infty}\left[r^3(\Psi_2 + \bar\Psi_2)\right]$

et $\overset{\circ}{b}(u,x^i) \equiv \lim_{r\to\infty}(r\,b)$, $\dot{\overset{\circ}{b}}$, $\ddot{\overset{\circ}{b}}$, $\dddot{\overset{\circ}{b}}$

sur la 2-surface intersection de l'hypersurface caractéristique de départ $u = u_0$ et du tube d'univers $r = C^{te} \to \infty$.

Remarquons qu'en raison de la relation (4.6), ces dernières données fixent $\sigma^{\circ\circ}$, $\dot{\sigma}^{\circ\circ}$, $\ddot{\sigma}^{\circ\circ}$ sur la 2-surface précitée.

Muni de ces données on est en mesure, en principe du moins, de déterminer les solutions $\Psi_2^\circ + \bar\Psi_2^\circ$ et $\overset{\circ}{b}$ de (4.20) (4.21) dans un voisinage de l'hypersurface initiale $u = u_0$. Introduisant ces quantités $(\Psi_2^\circ + \bar\Psi_2^\circ)$ et $\overset{\circ}{b}$ ainsi que la donnée Φ° dans les diverses formules où elles figurent, on détermine, ce faisant, l'ensemble des fonctions de champ. Ajoutons que l'exactitude

---

(1) Même remarque qu'en page 19.

avec laquelle celles-ci seront connues ne dépend que du nombre de termes que comportent leurs développements (3.5) (3.6) (3.7) (3.8), calculés à partir des équations radiales.

En conclusion de cette section il apparait donc que l'obtention des métriques, régies par (1.1) et correspondant à des espaces-temps algébriquement spéciaux, à comportement asymptotiquement minkowskien, se ramène à la résolution des équations (4.20) (4.21) compte tenu des données initiales que nous avons notées précédemment. Il y a lieu de préciser que telles solutions existent effectivement puisque l'on peut citer, comme exemple concrets, les métriques de Vaidya et Patel que nous énoncerons à la section VI.

Remarque.

A la différence de la distorsion σ la quantité b n'a pas, semble-t-il, de signification géométrique plus immédiate que celle qui résulte de son introduction dans (2.8); pour tenter de combler cette lacune on pourrait éventuellement dire, en raison de (4.6)

$$\sigma^{\circ} = b^{\circ}_{\circ} - \vartheta b$$

que b est le " potentiel " duquel dérive σ° lorsque le champ de vecteurs $\hat{l}_4$ est sans distorsion.

V. EXPRESSION DES GRANDEURS PHYSIQUES CARACTERISTIQUES DES FLUX EMIS.

5 1. - Analyse qualitative de la situation physique [10].

Supposons que la quantité Ψ_0 soit donnée sur l'hypersurface caractéristique, d'équation $u = 0 \; (= u_1)$, sur laquelle se propage l'onde de choc qui correspond à l'émission du fluide isotrope et au commencement du phénomène de rayonnement gravitationnel, éventuel. Supposons aussi que le champ soit indépendant de u, c'est à dire du temps, pour $u < u_1$. Il apparait alors immédiatement que la quantité Ψ_0, de même que les quantités Ψ_1°, $\mathrm{Re}\,\Psi_2^{\circ}$ données sur la 2-surface déterminée par l'intersection de l'hypersurface $u = u_1$ et du tube d'univers $r = 0 \longrightarrow \infty$, correspondent au champ initial et n'ont par conséquent aucune relation avec les divers phénomènes ayant lieu postérieurement, pour $u > u_1$. Ces phénomènes seront donc complètement décrits par les fonctions suivantes, choisies arbitrairement sur l'hypersurface $r = 0 \longrightarrow \infty$:

. $\sigma^\circ(u, x^i)$ pour l'aspect purement gravitationnel, d'une part;

. $\Phi^\circ(u, x^i)$ et $b^\circ(u, x^i)$ pour l'aspect lié à la présence du courant de matière isotrope, d'autre part.

Les formules mathématiques, tendant à exprimer les diverses caractéristiques physiques (énergie, impulsion, moment cinétique..) des flux de matière isotrope et de rayonnement gravitationnel émis, devront faire apparaître naturellement ces deux aspects et donc être écrites en termes des fonctions σ° , Φ° et b° .

Il est clair que les considérations précédentes valent seulement lorsque la distorsion $\hat{\sigma}$, du champ de vecteurs $\hat{l}_\alpha$, ne disparait pas. Si, au contraire, $\hat{\sigma}$ est nulle alors, nous avons vu qu'après la résolution des équations du champ, il ne subsiste plus aucune fonction arbitraire de nature purement gravitationnelle, la fonction $\Phi^\circ(u, x^i)$, liée à la matière isotrope; seule le restant. Cette situation diffère profondément de celle examinée dans les lignes ci-dessus et devra donc être analysée en des termes adaptés.

5 2. - Energie-impulsion

Dans ce paragraphe, nous nous proposons, poursuivant toujours dans le cadre théorique élaboré par Newman, Penrose, Unti ... d'évaluer l'énergie-impulsion totale émise par le système global dans une transition entre deux états stationnaires : $u = u_1$ et $u = u_2$ tels que $u_2 > u_1$.

. Indiquons d'abord le raisonnement conduisant à l'expression de l'énergie émise. Les auteurs précités, partant du cas où, le champ étant stationnaire, il est facile de vérifier concrètement que l'expression :

$$E = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_2} \mathrm{Re}\,\Psi_2^\circ \, d\omega \qquad , \; d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{5.1}$$

(l'intégration a lieu sur la 2-sphère S_2 déterminée par $u = Cte$ et $r = Cte$) donne bien l'énergie totale du champ, admettant qu'il en est encore ainsi lorsque le champ est fonction du temps [2] [10] . A leur suite, nous retiendrons (2.1) pour exprimer dans le présent contexte, l'énergie totale du système.

A partir de l'équation du mouvement (3.31) on va obtenir une équatic différentielle reliant E, σ° et Φ° . Compte tenu de (3.20) (3.21), on déduit tout d'abord de (3.31) :

$$\dot{\Psi}_2^\circ + (\sigma^\circ \eth^\circ)^\cdot = \dot{\sigma}^\circ \bar{\eth}^\circ + \sigma^\circ \bar{\eth}^\circ + \Phi^\circ \tag{5.2}$$

Puis l'on intègre les deux membres de cette relation sur la 2-sphère S_2 ; observant qu'en raison de la propriété suivante, démontrée dans [9]:

$$(5.3) \qquad \int {}_s Y_\ell^m \eth^{\ell-s+1} \chi \, d\omega = 0$$

(où ${}_s Y_\ell^m$ désigne les harmoniques de spin s et χ une fonction de poids de spin $-(\ell+1)$) le terme $\eth^2 \dot\sigma^0$ disparait dans cette opération, il reste alors :

$$\frac{d}{du} \int_{S_2} \left(\Psi_2^0 + \sigma^0 \dot\sigma^0 \right) d\omega = \int_{S_2} \left(\dot\sigma^0 \bar\sigma^0 + \Phi^0 \right) d\omega .$$

La partie réelle de cette équation est :

$$(5.4) \qquad \frac{d}{du} \int_{S_2} \left[\mathrm{Re}\, \Psi_2^0 + \tfrac{1}{2} (\sigma^0 \dot{\bar\sigma}^0) \right] = \int_{S_2} \left(\dot\sigma^0 \bar\sigma^0 + \Phi^0 \right) d\omega ,$$

soit, d'après (5.1) :

$$(5.5) \qquad -\frac{dE}{du} + \frac{1}{8\pi} \frac{d^2}{du^2} \int \sigma^0 \bar\sigma^0 \, du = \frac{1}{4\pi} \int \left(\dot\sigma^0 \bar\sigma^0 + \Phi^0 \right) d\omega .$$

Faisant l'hypothèse que le champ est stationnaire pour les valeurs de u extérieures à $]u_1, u_2[$ nous intégrons les deux membres de la relation (5.5) sur cet intervalle; compte tenu du fait que $\dot\sigma^0 = 0$ pour $u_1 \leq u_2$ et $u \geq u_2$ nous trouvons :

$$(5.6) \qquad E_2 - E_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{u_1}^{u_2} \int_{S_2} \left[|\dot\sigma^0|^2 + \Phi^0 \right] d\omega \, du .$$

Dans cette expression E_1 , E_2 sont les énergies, physiquement bien définies, correspondant aux états stationnaires initial et final.

• Le raisonnement permettant d'obtenir l'expression de l'impulsion totale émise serait semblable à celui que nous venons de mener à propos de l'énergie, aussi suffit-il d'en préciser le début et le terme.

La formule donnant l'impulsion totale du système est :

$$(5.7) \qquad P^k = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \mathrm{Re}\, \Psi_2^0 \; \xi^k \, d\omega$$

où

$$(5.8) \qquad \xi^k = \frac{x^k}{r}$$

x^k désignant les coordonnées cartésiennes telles que :

(5.9) $x^1 = r \sin\theta \cos\varphi \ , \ x^2 = r \sin\theta \sin\varphi \ , \ x^3 = r \cos\theta \ .$

Et l'on aboutit finalement à :

(5.10) $$P_1^k - P_2^k = -\frac{1}{4\pi} \int_{u_1}^{u_2} \int_{S_2} \xi^k \left[|\dot{\sigma}^\circ|^2 + \Phi^\circ \right] d\omega \, du \ .$$

Les deux expressions (5.6) (5.10) peuvent être rassemblées dans la formulation unique suivante :

(5.11) $$\boxed{P^k(u_1) - P^k(u_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_{u_1}^{u_2} \int_{S_2} l^k \left[|\dot{\sigma}^\circ|^2 + \Phi^\circ \right] d\omega \, du}$$

dans laquelle on a noté $P^\circ \equiv E$ et $l^\mu : \left(1 \ , \ \frac{x^k}{r} \right)$ le vecteur isotrope orthogonal à l'hypersurface $u = \text{Cte}$ rapporté aux coordonnées radiatives cartésiennes :

$$\left\{ x^\circ \equiv t = u + r \quad , \quad x^k \ \text{définies en (5.9)} \right\} .$$

(Cette forme des coordonnées radiatives a été discutée par A. Papapetrou dans [10 bis]).

Pour éviter toute confusion de notations, faisant référence aux définitions données au début du paragraphe 2 1 , nous pouvons noter par $\tilde{x}^\mu$ les coordonnées radiatives (u, r, θ, φ) et $l^\mu : (0, 1, 0, 0)$ les composantes de l qui s'y rapportent.

Pour commenter ce résultat il convient d'envisager successivement les deux cas suivants :

a) Les champs de vecteurs $\hat{l}_\alpha$ et l_α coïncident ($\Rightarrow b = 0$ dans (2.8))

Considérons alors chacun des deux termes composant le membre droit de (5.11) et voyons ce qu'il représente. La signification du second est manifeste : il s'agit de l'énergie-impulsion sortante dans l'intervalle $]u_1, u_2[$ correspondant au courant de matière isotrope figurant dans (1.1). Quant au premier terme, on en infère qu'il a trait au seul champ de gravitation et doit, par conséquent, exprimer l'énergie-impulsion du rayonnement sortant dans l'intervalle précité; la validité de cette expression, pour caractériser le rayonnement gravitationnel sortant, dans le cas du vide, se trouve ainsi confirmée [3] [4] [9].

b) Le champ de vecteurs $\hat{l}_\alpha$ est général ($b \neq 0$).

Puisque la formulation (5.11) reste présentement inchangée l'interprétation donnée ci-dessus, qui en découle, le demeure également; ceci signifie que seule la composante du courant de matière colinéaire à l_α apporte une contribution effective à l'énergie-impulsion émise.

Le résultat (5.11) ne permet donc pas de faire la distinction entre les deux cas que nous venons d'évoquer.

5 3. - Moment cinétique

Nous allons évaluer maintenant le moment cinétique total du flux de matière isotrope et de rayonnement gravitationnel émis par le système dans une transition entre les deux états stationnaires, déjà envisagés, $u = u_1$ et $u = u_2$.

Le moment cinétique total du système est donné par l'expression :

$$(5.12) \qquad J^k = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi} \int_{S_1} (\Psi_1^* \eth \ell^k - \Psi_1^* \eth \ell^k) \, d\omega$$

dans laquelle ℓ^k désigne les trois composantes d'espace, notées en (5.8) $(\xi^k = \ell^k)$, du vecteur ℓ^μ et $\eth, \bar{\eth}$ les opérateurs définis en (3.14). L'argument justifiant cette formule serait du même type que celui indiqué au paragraphe ci-dessus à propos de l'énergie.

En vue des calculs ultérieurs on va modifier un peu l'écriture du second membre de (5.12) de façon à y faire figurer les opérateurs $\eth$ et $\bar{\eth}$, définis en (3.4).

Les composantes ℓ^k , rapportées aux coordonnées cartésiennes (5.9), peuvent être exprimées sous forme de combinaisons linéaires des fonctions harmoniques ordinaires non normées :

$$(5.13) \qquad Y_1^0 = \cos\theta \quad , \quad Y_1^1 = -\sin\theta \, e^{i\varphi} \quad , \quad Y_1^{-1} = \sin\theta \, e^{-i\varphi} ,$$

ainsi qu'il suit :

$$(5.14) \qquad (\ell^k) \begin{cases} \ell^1 = \frac{1}{2}\left(-Y_1^1 + Y_1^{-1} \right) \\ \ell^2 = -\frac{1}{2i}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1} \right) \\ \ell^3 = Y_1^0 \ . \end{cases}$$

Il en résulte que l'on peut écrire, selon (3.4) :

$$(5.15) \qquad \bar{\eth} \ell^k = -\sqrt{2}\, \eth \ell^k \qquad\qquad \eth \ell^k = -\sqrt{2}\, \bar{\eth} \ell^k \ ;$$

les composantes $\eth \ell^k$, $\bar{\eth} \ell^k$ étant, respectivement, constituées de ${}_1Y_1^m$ et de $-{}_1Y_1^m$. Introduisant (5.15) au second membre de (5.12) on obtient la

nouvelle formulation :

$$J^{k} = -\frac{i}{4\pi}\int \left(\Psi_i \eth l^{k} - \bar{\Psi}_i \eth l^{k} \right) d\omega . \qquad (5.16)$$

On va maintenant dériver, par rapport à u , les deux membres de cette dernière expression, puis ensuite, grâce à l'équation du mouvement (3.29) on obtiendra une équation différentielle reliant J^{k}, σ°, Φ°, b° . Ce faisant, on a d'abord :

$$\dot{J}^{k} = -\frac{i}{4\pi}\int \left(\dot{\Psi}_i \eth l^{k} - \bar{\Psi}_i \eth l^{k} \right) d\omega$$

puis, en raison de (3.29) :

$$\dot{J}^{k} = \frac{i}{4\pi}\int \left[(\eth \Psi_i - 2\sigma^{\circ}\Psi_i - 2\Phi^{\circ} b_i)\eth l^{k} - (\eth \bar{\Psi}_i - 2\bar{\sigma}^{\circ}\bar{\Psi}_i - 2\Phi^{\circ} b_i)\eth l^{k} \right] d\omega . \qquad (5.17)$$

En utilisant les deux propriétés suivantes des opérateurs $\eth$, $\bar{\eth}$, démontrées dans [9] :

$$\int A \eth B \, d\omega = -\int B \eth A \, d\omega , \qquad (5.18)$$

la somme des poids de spin des fonctions A et B étant - 1, et :

$$(\bar{\eth}\eth - \eth\bar{\eth})\chi = s\chi , \qquad (5.19)$$

χ ayant un poids de spin s ,
on peut écrire la relation :

$$\int (\eth \Psi_i \eth l^{k} - \bar{\eth}\bar{\Psi}_i \eth l^{k}) d\omega = -\int (\Psi_i - \bar{\Psi}_i) l^{k} d\omega ;$$

soit encore, grâce à (3.24) :

$$= -\int \left(\bar{\eth}^{2}\sigma^{\circ} + \bar{\sigma}^{\circ}\dot{\sigma}^{\circ} - \eth^{2}\bar{\sigma}^{\circ} - \sigma^{\circ}\dot{\bar{\sigma}}^{\circ} \right) l^{k} d\omega .$$

Compte tenu de (5.14) et de la propriété (5.3) des Y_{ℓ}^{m}, on voit que les termes $\bar{\eth}^{2}\sigma^{\circ}$ et $\eth^{2}\bar{\sigma}^{\circ}$ n'apportent aucune contribution à l'intégrale; appliquant de nouveau (5.18) (5.19) aux termes restant on obtient :

$$\int (\eth \Psi_i \eth l^{k} - \bar{\eth}\bar{\Psi}_i \eth l^{k}) d\omega = \int \left[\bar{\eth}(\bar{\sigma}^{\circ}\dot{\sigma}^{\circ})\eth l^{k} - \eth(\sigma^{\circ}\dot{\bar{\sigma}}^{\circ})\bar{\eth} l^{k} \right] d\omega . \qquad (5.20)$$

Si, dans le second membre de (5.17), on tient compte de cette relation, on substitue à Ψ_3° son expression (3.20), alors on trouve l'expression suivante :

$$J^k = \frac{i}{4\pi}\int\Big[\big(\dot\sigma^\circ\eth\bar\sigma^\circ + 3\bar\sigma^\circ\eth\dot\sigma^\circ - 2\Phi^\circ\bar b\big)\eth l^k - \big(\dot{\bar\sigma}^\circ\eth\sigma^\circ + 3\sigma^\circ\eth\dot{\bar\sigma}^\circ - 2\Phi^\circ b^\circ\big)\bar\eth l^k\Big]\,d\omega. \qquad (5.21)$$

Intégrant enfin sur l'intervalle $]u_1, u_2[$ on aboutit au résultat :

$$J^k(u_2)-J^k(u_1) = \frac{i}{4\pi}\int_{u_1}^{u_2}\int\Big[\big(\dot\sigma^\circ\eth\bar\sigma^\circ + 3\bar\sigma^\circ\eth\sigma^\circ - 2\Phi^\circ\bar b^\circ\big)\eth l^k - \big(\dot{\bar\sigma}^\circ\eth\sigma^\circ + 3\sigma^\circ\eth\dot{\bar\sigma}^\circ - 2\Phi^\circ b^\circ\big)\bar\eth l^k\Big]\,d\omega du. \qquad (5.22)$$

Cette expression permet de distinguer entre les deux cas déjà considérés en 5 2 :

a) Les champs de vecteurs $\hat l_k$ et l_k coïncident; le courant de matière est alors purement radial ($b = 0$) il ne contribue pas au moment angulaire et le second membre de la formule ci-dessus ne comporte donc que des termes, de nature gravitationnelle, liés à σ° .

b) Le champ de vecteurs $\hat l_k$ est général; la formule est alors complète avec ces deux groupes de termes : les uns afférents au champ de gravitation (σ°), les autres à la composante non radiale du courant de matière (Φ°, b°).

Remarques

a) La déduction des expressions (5.19) (5.12) fait intervenir d'une manière essentielle l'hypothèse que le champ, qui était d'abord stationnaire, puisse l'être à nouveau après un intervalle de temps fini. Il convient de faire des réserves sur la possibilité de réaliser absolument cette hypothèse car il y a tout lieu de penser qu'elle n'est pas compatible, en toute rigueur, avec la structure non linéaire du système d'Einstein. Il semble, en fait, que le champ ne pourra redevenir stationnaire qu'asymptotiquement pour $u = u_1 \to \infty$.

b) La disparition de toute fonction arbitraire (gravitationnelle), dans le cas $\hat\sigma = 0$ conduit à un changement important dans les conditions d'application des formules (5.11) (5.22). Dans le cas général ($\hat\sigma \neq 0$), les fonctions Φ° , b° et σ° sont arbitrairement choisies tandis que présentement ($\hat\sigma = 0$) σ° est déduite de b° selon (4.6), b° étant elle-même solution

des équations (4.20)(4.21) si bien que seule demeure arbitraire; la situation est donc bien différente dans l'un et l'autre cas. Cette circonstance fait que l'interprétation des résultats (5.11) (5.22) apparait incertaine dans le cas $\hat{\sigma} = 0$; nous nous proposons précisément d'approfondir cette question dans une étude ultérieure.

Cependant nous pouvons d'ores et déjà, en suivant une autre procédure, apporter une réponse à cette question dans le cas particulier des solutions de la classe de Kerr et Schild. C'est l'objet de la section suivante.

VI. PSEUDO-TENSEUR ENERGIE-IMPULSION ET METRIQUE DE KERR-SCHILD.

§ 1. - Rappel de l'expression du pseudo-tenseur de Landau et Lifshitz.

Plusieurs expressions pseudo-tensorielles ont été proposées et sont couramment utilisées [11] [12]..., chacune d'elles a ses propriétés spécifiques. Dans la présente étude nous emploierons le pseudo-tenseur de Landau et Lifshitz [13] . Il importe, pour la clarté de l'exposé, de rappeler comment on le forme.

On pose d'abord :

$$U^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2\chi}(-g)\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\right) ; \qquad \left(\chi = \frac{8\pi G}{c^4}\right) \tag{6.1}$$

l'on constate que ces quantités possèdent les mêmes symétries que les composantes $R^{\alpha\beta\mu\nu}$ du tenseur de courbure et que :

$$U^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = 0. \tag{6.2}$$

Puis l'on écrit l'identité mathématique suivante :

$$(\chi)^{-1} S^{\alpha\beta} = (-g)^{-1} U^{\alpha\mu\beta\nu}{}_{,\mu\nu} + t^{\alpha\beta} \tag{6.3}$$

dans laquelle $S^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ est le tenseur d'Einstein et $t^{\alpha\beta}$, précisément, le pseudo-tenseur de Landau et Lifshitz ; c'est une expression symétrique en (α,β) , dépendant du tenseur métrique et de ses dérivées premières.
On définit enfin $W^{\alpha\beta}$ comme suit :

$$W^{\alpha\beta} = (-g)\left[-(\chi)^{-1} S^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}\right] = -U^{\alpha\mu\beta\nu}{}_{,\mu\nu}. \tag{6.4}$$

Compte tenu de (6.1) et (6.2), cette expression est symétrique et satisfait :

(6.5) $$W^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 .$$

Considérant les équations du champ :

(6.6) $$S^{\alpha\beta} = -\kappa T^{\alpha\beta} ,$$

nous pouvons encore écrire :

(6.7) $$W^{\alpha\beta} = (-g)\left(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} \right).$$

La quantité conservative $W^{\alpha\beta}$ se compose de deux termes : $T^{\alpha\beta}$ le tenseur énergie-impulsion de la matière et des champs autres que gravitationnel, et $t^{\alpha\beta}$ le pseudo-tenseur énergie-impulsion du champ de gravitation.

6 2. - Expression de $t^{\alpha\beta}$ pour une métrique de type Kerr-Schild [14].

Compte tenu du rappel précédent, nous nous proposons de déterminer le pseudo-tenseur énergie-impulsion $t^{\alpha\beta}$ relatif aux espaces-temps pourvus de métriques du type Kerr-Schild, soit :

(6.8) $$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + 2H k_\alpha k_\beta \qquad (\text{avec } \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0)$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ est la métrique de Minkowski rapportée à un système de coordonnées cartésiennes. Pour ce faire on calculera successivement $S^{\alpha\beta}$, puis $W^{\alpha\beta}$ et ensuite, comparant les expressions obtenues, on en déduira $t^{\alpha\beta}$ par application de (6.4).

6 2 1 Expression de $S_{\alpha\beta}$.

Le champ de vecteurs k_α , figurant en (6.8), est supposé isotrope par rapport à la métrique de Minkowski, on en déduit qu'il l'est aussi par rapport à la métrique riemannienne $g_{\alpha\beta}$; de plus on requiert que ses trajectoires forment une congruence géodésique telle que :

(6.9) $$k_{\mu;\nu} k^\nu = 0$$

(; symbolise la dérivation covariante par rapport à $g_{\mu\nu}$).

Indiquons quelques éléments du calcul de $\mathcal{S}^{\alpha\beta}$ [16] :

. les composantes contravariantes de la métrique s'écrivent :

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - 2H k^\alpha k^\beta \qquad \text{où} \quad k^\alpha = \eta^{\alpha\gamma} h_\gamma = g^{\alpha\gamma} h_\gamma \; ; \tag{6.10}$$

. les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = (H k^\lambda h_\mu)_{,\nu} + (H k^\lambda h_\nu)_{,\mu} - (H h_\nu h_\mu)^{,\lambda} + 2 H DH\, k^\lambda h_\mu h_\nu \tag{6.11}$$

d'où il résulte que :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} h_\lambda = - DH\, h_\mu h_\nu \quad , \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} k^\nu = DH\, k^\lambda h_\mu \, , \tag{6.12}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = 0 \qquad (DH \equiv H_{,\nu} k^\nu) \; ; \tag{6.13}$$

. le tenseur de Ricci s'écrit, compte tenu de (6.13) :

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^\nu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\nu} \quad , \tag{6.14}$$

soit explicitement :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = {} & A_\alpha h_\beta + A_\beta h_\alpha + (DH + H k^\nu{}_{,\nu})(h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha}) - 2H h_{\alpha,}{}^\nu h_{\beta,\nu} \\ & + \Big\{ 2H \big[D^2 H + DH\, k^\nu{}_{,\nu} - H k_{\nu,\rho} (k^{\rho,\nu} - k^{\nu,\rho}) \big] - H_{,\nu}{}^\nu \Big\} h_\alpha h_\beta \end{aligned} \tag{6.15}$$

on a posé :

$$A_\alpha \equiv (DH + H k^\nu{}_{,\nu})_{,\alpha} - 2 H_{,\nu} h_{\alpha,}{}^\nu - H h_{\alpha,\nu}{}^\nu \; ;$$

. enfin la courbure riemannienne scalaire s'écrit comme suit, en tenant compte de (6.13) (6.14) (6.15) :

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} (\Gamma^\nu_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^\nu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\nu}) \, ,$$

soit, d'une façon explicite :

$$R = 2 \big[D^2 H + 2 DH\, k^\nu{}_{,\nu} + H (k^\nu{}_{,\nu})^2 - H k_{\nu,\rho} k^{\rho,\nu} \big] \, . \tag{6.16}$$

Et finalement, il résulte de (6.15) (6.16) l'expression suivante du tenseur d'Einstein :

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} = {} & A_\alpha h_\beta + A_\beta h_\alpha + (DH + H h^\nu{}_{,\nu})(h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha}) - 2H h_{\alpha,}{}^{\nu} h_{\beta,\nu} \\
& - h_\alpha h_\beta \left[2H\left(DH\, h^\nu{}_{,\nu} + H(h^\nu{}_{,\nu})^2 - H\, h_{\nu,\varsigma} h^{\nu\varsigma} \right) + H_{,\nu}{}^{\nu} \right] \\
& - \eta_{\alpha\beta} \left(D^2 H + DH\, h^\nu{}_{,\nu} + H(h^\nu{}_{,\nu})^2 - H\, h_{\nu,\varsigma} h^{\varsigma,\nu} \right) .
\end{aligned}
\qquad (6.17)
$$

6 2 2 Expression de $W_{\alpha\beta}$.

On calcule maintenant $W_{\alpha\beta}$. Compte tenu de (6.1) (6.4) (6.10) on a :

$$
W_{\alpha\beta} = -\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\varsigma}\, U^{\gamma\mu\varsigma}{}_{,\mu\nu} = -\eta_{\alpha\beta}(H h^{\mu\nu} h^\nu)_{,\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}(H h_\alpha h_\beta)_{,\mu\nu} + (H h^{\mu\nu} h_\beta)_{,\alpha\mu} + (H h^{\mu\nu} h_\alpha)_{,\beta\mu} .
\qquad (6.18)
$$

Après avoir effectué les opérations de dérivation mentionnées, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\kappa W_{\alpha\beta} = {} & -(A_\alpha h_\beta + A_\beta h_\alpha) - (DH + H h^\nu{}_{,\nu})(h_{\alpha,\beta} + h_{\beta,\alpha}) + 2H\, h_{\alpha,\nu} h_\beta{}^{,\nu} \\
& + \eta_{\alpha\beta}\left[D^2 H + 2DH\, h^\nu{}_{,\nu} + H\left((h^\nu{}_{,\nu})^2 - h^{\mu}{}_{,\nu}\, h^{\nu}{}_{,\mu} \right) \right] + h_\alpha h_\beta\, H_{,\nu}{}^{\nu} .
\end{aligned}
\qquad (6.19)
$$

6 3 3 Expression du pseudo-tenseur $t_{\alpha\beta}$.

Par comparaison de (6.19) et (6.17), on constate que $W_{\alpha\beta}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$
\kappa W_{\alpha\beta} = -S_{\alpha\beta} + 2H\, h_\alpha h_\beta \left[-DH\, h^\nu{}_{,\nu} + H\, h_{\nu,\varsigma} h^{\nu\varsigma} - H(h^\nu{}_{,\nu})^2 \right]
\qquad (6.20)
$$

d'où il résulte, selon (6.4), l'expression du pseudo-tenseur énergie-impulsion du champ de gravitation :

$$
\boxed{ t_{\alpha\beta} = (\kappa)^{-1} 2H\, h_\alpha h_\beta \left[-DH\, h^\nu{}_{,\nu} + H\, h_{\nu,\varsigma} h^{\nu\varsigma} - H(h^\nu{}_{,\nu})^2 \right] . }
\qquad (6.21)
$$

En utilisant les scalaires intrinsèques ρ et $|\sigma|$, attachés à la congruence engendrée par h_α , on peut écrire, de façon équivalente :

(6.22) $$t_{\alpha\beta} = (X)^{-1}\, 2H\, k_\alpha k_\beta \left[DH(\zeta+\bar\zeta) + 2H|\sigma|^2 - H(\zeta^2+\bar\zeta^2)\right].$$

Si maintenant l'on se reporte à l'expression de $S_{\alpha\beta}$ (6.17) et que l'on calcule le produit contracté $S_{\alpha\beta} k^\alpha$, on trouve :

(6.23) $$S_{\alpha\beta} k^\alpha = k_\beta \left[DH(\zeta+\bar\zeta) + 2H|\sigma|^2 - H(\zeta^2+\bar\zeta^2)\right].$$

Rapprochant les deux expressions (6.22) (6.23) on est alors conduit à l'énoncé suivant, à savoir :

Considérant un espace-temps V_4 pourvu d'une métrique de la classe de Kerr-Schild dont les coefficients $(g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + 2H k_\alpha k_\beta)$ sont solutions des équations d'Einstein :

(6.24) $$S_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta},$$

au second membre desquelles figure un tenseur $T_{\alpha\beta}$ satisfaisant à la condition:

(6.25) $$k^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 ,$$

alors le pseudo-tenseur énergie-impulsion, (de Landau et Lifshitz) du champ de gravitation est nul. Si, de plus, l'espace-temps V_4 est à comportement asymptotiquement minkowskien alors le flux d'énergie traversant la 2-sphère de l'infini est entièrement déductible du tenseur matériel $T_{\alpha\beta}$, il n'y a donc aucun rayonnement gravitationnel.

6 3. - Discussion de la condition (6.25) - Quelques exemples de métrique la satisfaisant.

Avant de citer quelques exemples de métriques pour lesquelles la condition (6.25) est vérifiée, il y a lieu tout d'abord d'étudier un peu le système des équations du champ et de préciser les conséquences de (6.25).

Pour ce faire, associons à k_α trois autres champs de vecteurs $\tilde n_\alpha$, $\tilde m_\alpha$ et $\bar{\tilde m}_\alpha$ tels que :

(6.26) $$\begin{cases} k^\alpha \tilde n_\alpha = -\tilde m_\alpha \bar{\tilde m}_\alpha = 1 \\ \tilde n^\alpha \tilde n_\alpha = \tilde m^\alpha \tilde m_\alpha = \bar{\tilde n}^\alpha \bar{\tilde m}_\alpha = k^\alpha \tilde m_\alpha = 0 \end{cases}$$

et exprimons, en utilisant les coefficients de rotation de Newman-Penrose [1] les projections de $S_{\alpha\beta}$ (6.17) :

(6.27)

a) $S_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \equiv 0$

b) $S_{\alpha\beta} k^\alpha \bar{m}^\beta \equiv DH(\rho+\bar{\rho}) + 2H\sigma\bar{\sigma} - H(\rho^2+\bar{\rho}^2)$

c) $S_{\alpha\beta} k^\alpha m^\beta \equiv 0$

d) $S_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta \equiv D'H - DH(\rho+\bar{\rho}) - H(\rho-\bar{\rho})^2$

e) $S_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha m^\beta \equiv 2\sigma\left[DH + H(\rho-\bar{\rho})\right]$

f) $S_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta \equiv A_\alpha \bar{m}^\alpha + DH(\alpha+\beta+\tau) + H\left[(\rho-\bar{\rho})(\bar{\alpha}+\beta) + \tau(\rho+\bar{\rho}) + 2\sigma(\alpha+\bar{\beta})\right]$

g) $S_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha m^\beta \equiv 2\Big\{ A_\alpha \bar{m}^\alpha + DH\left[(\gamma+\bar{\gamma}) - DH\right] + H(\rho+\bar{\rho})\left[2DH - (\gamma+\bar{\gamma})\right]$
$+ 2H|\alpha+\bar{\beta}|^2 - H\left[H(\rho^2+\bar{\rho}^2) - 2H|\sigma|^2\right]\Big\} - H_{,\nu}{}^{\nu}$.

La condition (6.24) se traduit par l'équation :

$$S_{\alpha\beta} k^\alpha \bar{m}^\beta \equiv DH(\rho+\bar{\rho}) + 2H|\sigma|^2 - H(\rho^2+\bar{\rho}^2) = 0 .$$

On se limite maintenant à considérer le cas où la distorsion σ de k_ν est nulle; l'équation précédente s'écrit alors comme suit :

(6.28) $$DH(\rho+\bar{\rho}) - H(\rho^2+\bar{\rho}^2) = 0 ,$$

c'est une équation radiale. Compte tenu de l'équation suivante :

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2+\sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi) + \Phi_{00} ,$$

donnée par Newman-Penrose dans [1] *, qui, dans le cas présent, se réduit à :

(6.29) $$D\rho = \rho^2$$

l'équation (6.28) peut être intégrée sous la forme suivante :

(6.30) $$H = H^\circ(\rho+\bar{\rho}) \qquad \text{avec} \qquad DH^\circ = 0 .$$

De ce résultat découle immédiatement que :

$$S_{\alpha\beta} \bar{m}^\alpha \bar{m}^\beta \equiv 0 .$$

---

* il s'agit précisément de l'équation (4.2a) de [1] .

En raison de la nullité de σ' on a aussi :

$$S_{\alpha\beta}\,\bar{m}^{\alpha}\bar{m}^{\beta} = 0$$

alors que

$$S_{\alpha\beta}\,\bar{n}^{\alpha}\bar{m}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad S_{\alpha\beta}\,\bar{n}^{\alpha}\bar{n}^{\beta} \neq 0 \ .$$

Pour être compatible avec ces diverses relations un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ devra être de la forme suivante :

(6.31) $$T_{\alpha\beta} = \Phi_{(1)}\,k_{\alpha}k_{\beta} + \Phi_{(1)}\left(k_{\alpha}\bar{m}_{\beta} + k_{\beta}\bar{m}_{\alpha}\right) + \Phi_{(2)}\left(k_{\alpha}\bar{\bar{m}}_{\beta} + k_{\beta}\bar{\bar{m}}_{\alpha}\right).$$

Introduisant un paramètre affine r le long de chacune des trajectoires géodésiques de k^{α} , on peut écrire $k^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{r}$ (ou $\overline{k} = \frac{\partial}{\partial r}$) et ainsi commodément intégrer l'équation (6.29) dans le cas $\rho \neq 0$; on trouve :

(6.32) $$\rho = -\left(r + \rho^{\circ}\right)^{-1} \qquad \text{avec} \qquad D\rho^{\circ} = 0.$$

En effectuant la transformation :

(6.33) $$r' = r + \mathrm{Re}\left(\rho^{\circ}\right)$$

il est possible d'écrire :

(6.34) $$\rho^{\circ} = i\,\Sigma^{\circ}$$

où Σ° est une fonction réelle.

Et finalement, compte tenu de (6.30) (6.32) (6.33) (6.34) on arrive à l'expression suivante de H :

(6.35) $$H = 2\,\frac{r\,H^{\circ}}{r^{2} + \Sigma^{\circ 2}} \ .$$

Il en résulte que l'espace-temps considéré présente, dans ce cas, un comportement asymptotiquement minkowskien lorsque $r \longrightarrow \infty$; en vertu de la conclusion du paragraphe 6 2 , il est donc non radiatif.

Indiquons quelques solutions propres à illustrer le résultat précédent et, de ce fait, telles que $t_{\alpha\beta} = 0$.

Dans le cas du vide, on peut citer les métriques de Schwarzschild et de Kerr [15] . Dans le cas intérieur les solutions que nous allons indiquer sont relatives au schéma matière pure isotrope :

(6.36) $$T_{\alpha\beta} = -2\,\Phi\,k_{\alpha}k_{\beta} \qquad \left(\longrightarrow\ k_{\alpha} = \hat{l}_{\alpha}\right).$$

Citons d'abord la solution à symétrie sphérique de Vaidya [17] :

(6.37) $$ds^{2} = \left(1 - \frac{2m(u)}{r}\right)du^{2} + 2\,du\,dr - r^{2}\left(d\theta^{2} + \sin^{2}\theta\,d\varphi^{2}\right).$$

Dans l'expression de cette métrique figure $m(u)$, fonction arbitraire du temps retardé u astreinte seulement à être dérivable et non croissante.

La densité d'énergie matérielle Φ , l'énergie totale, mesurées sur la " sphère de l'infini ", sont respectivement proportionnelles à $\frac{dm}{du}$ et à $m(u)$. Comme cela était d'emblée prévisible, en raison de la symétrie

sphérique, il n'y a aucun rayonnement gravitationnel émis.

Citons ensuite, parmi les solutions récemment obtenues par Vaidya [17] et Patel [18] , la métrique à symétrie axiale dite " métrique de Kerr radiative" dont l'expression est :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2m}{U^3}\,\frac{r^2\left(r+\frac{b}{2}\cos\theta\right)}{r^2\left(r+\frac{b}{2}\cos\theta\right)^2 + a^2U^2z^2}\times$$

(6.38)

$$\times\left\{dt - \frac{z}{r}\,dz - \frac{\left[\left(r+\frac{b}{2}\right)x - aUy\right]dx + \left[\left(r+\frac{b}{2}\right)y + aUx\right]dy}{\left(r+\frac{b}{2}\right)^2 + a^2U^2}\right\}^2$$

où U, r, θ sont déterminés par les relations suivantes :

(6.39)

$$\left.\begin{cases} x^2+y^2 = \left[\left(r+\frac{b}{2}\right)^2 + a^2U^2\right]\sin^2\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2+y^2}{\left(r+\frac{b}{2}\right)^2+a^2U^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

(6.40)

$$a^2U^2 \equiv b(t-r) + a^2 - \frac{b^2}{4}\left(1+\sin^2\theta\right).$$

Cette métrique dépend explicitement du temps t , par l'intermédiaire de U (6.40); elle implique, dans sa formulation, trois constantes m, a, b arbitraires (positives).

Sur (6.38) (6.39) (6.40) on voit facilement que l'annulation de m conduit à la métrique de Minkowski, celle de b à la métrique Kerr; enfin si b et a tendent simultanément vers zéro de telle façon que le quotient $\frac{b}{a^2}$ tende vers k (fini) alors la métrique (6.38) revêt approximativement la forme (6.37) avec :

$$m(u) = \frac{m}{(1+ku)^{3/2}}\,.$$

Indiquons encore qu'il y a une singularité essentielle des composantes du tenseur de Riemann sur la 2-surface d'équations :

$$\left\{ x^2+y^2 = a^2 + bt \;,\quad z = 0 \right\}.$$

Précisons enfin que la densité d'énergie matérielle Φ (3.36) est proportionnelle à :

(6.41) $$\frac{b\,m}{a^2 U^5 \left[\left(r + \frac{b}{2}\cos^2\theta \right)^2 + a^2 U^2 \cos^2\theta \right]} .$$

Comme cette quantité doit être définie positive on voit qu'il en résulte que le domaine des valeurs admissibles de t est limité par

$$a^2 U^2 > 0 .$$

Il convient d'observer qu'à la différence du cas précédent (6.37) il n'y avait aucune évidence, a priori, que cette solution (6.38) ne fût pas radiative, c'est seulement par application de la conclusion de l'alinéa 6 2 2 que l'on peut dire qu'il en est bien ainsi.

Lorsque, outre σ , le coefficient de rotation ϱ est nul le calcul développé au début de ce paragraphe ne s'applique plus, et la forme de H , donnée en (6.35), ne vaut plus; cependant on a toujours $l_{\alpha\beta} = 0$.

Un exemple de cette situation est donné par la métrique de Robinson qui est telle que :

$$l_{\alpha;\beta} = 0 .$$

Pour un choix particulier de la fonction H on obtient la métrique des " ondes planes " de gravitation [7].

R E F E R E N C E S

1 E.T. NEWMAN et R. PENROSE : J. Math. Phys. 3, 566 (1962).

2 E.T. NEWMAN et T.W. UNTI : J. Math. Phys. 3, 891 (1962).

3 H. BONDI, M. VAN DER BURG et A.W. METZNER : Proc. Roy. Soc. A 269, 21 (1962).

4 R. SACHS : Proc. Roy. Soc. A 270, 103 (1962).

5 J. GOLDBERG et R. SACHS : Acta Physica Polonica Suppl. XXII, 13 (1962).

6 L. BEL : Cahiers de Physique 13B, 59 (1962).
" Le théorème de Goldberg-Sachs ".

Exposé fait au Séminaire Lichnerowicz (Janv. 1965).

7 F.A.E. PIRANI : dans " Lectures on General Relativity " (Brandeis 1964 ; Vol 1)
Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J. (1965).

8 I. MORET-BAILLY : Ann. I.H.P. XI, 415 (1969).

9 E.T. NEWMAN et R. PENROSE : Proc. Roy. Soc. A 305, 175 (1966).

10 A. PAPAPETROU : " Le problème du rayonnement gravitationnel "
Exposé fait au Séminaire Lichnerowicz (1963)
Communication au Colloque " Ondes et radiations gravitationnelles "
Ed. du C.N.R.S. (1974).

10 bis A. PAPAPETROU : Ann. I.H.P. XI, 251 (1969).

11 A. EINSTEIN : Ann. der Phys. 49, 769 (1916).

12 J. GOLDBERG : Phys. Rev. 111, 315 (1958).

13 L. LANDAU et E. LIFSHITZ : " Théorie du champ " Ed. de Moscou (1963).

14 R.P. KERR et A. SCHILD : Communication au Colloque pour le quatrième anniversaire d
G. Galilée Florence (1964).

15 R.P. KERR : Phys. Rev.Letters 11, 237 (1963).

16 L. MAS : C.R.A.S. A 268, 441 (1969).

17 P.C. VAIDYA : Nature 171, 260 (1953).

17 P.C. VAIDYA : Indian Ac. Sc. A 33, 264 (1951)

Tensor N.S. 24, 315 (1972)

" " 27, 275 (1973).

18 P.C. VAIDYA et L.K. PATEL : Phys. Rev. D 7, 3590 (1973).